TEORIA DELLE CATEGORIE

10/02

① Definizioni base

$M \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} O$ grafo orientato : $M = \{$insieme delle frecce$\}$
$O = \{$insieme degli oggetti / vertici$\}$

$s =$ "source", $t =$ "target"

$\Rightarrow M \times_0 M = \{(f, g) \in M \times M$ t.c. $t(f) = s(g)\}$ $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} M \times_0 M \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, "t"] \\ M \arrow[r, "s"] & O \end{tikzcd}$$

1° **Def** : una categoria è un grafo orientato con $M \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} O$ con due funzioni:

- $M \times_0 M \longrightarrow M$ (COMPOSIZIONE)
  (f, g) $\quad f \circ g$ tali che $s(f \circ g) = s(g)$ e $t(f \circ g) = t(f)$
- $O \longrightarrow M$ (IDENTITÀ) dove id_X è una SEZIONE
  X $\quad id_X$ $\quad (s(id_X) = t(id_X))$

tali che :
1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ $\quad \forall h, g, f \in M$ componibili
2) $id_X \circ f = f$, $f \circ id_X = f$ $\quad \forall f, X$ per cui ha senso

2° **Def** : una categoria $\mathcal{C}$ consiste in:

* O insieme di "oggetti"
* $\forall X, Y \in O$, un insieme $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ di "morfismi"
* $\forall X \in O$, un elemento $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$
* $\forall X, Y, Z$ una funzione $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$

che rispettano associatività (1)) e identità (2))

(•) ES : come posso definire una categoria come monoide?

ex : • Ogni insieme è una categoria : X insieme, $O = X$, $M = \{id_x \ \forall x \in X\}$

• Una categoria con un solo oggetto $\Rightarrow$ "è" un monoide
↑ l'insieme dei morfismi lo è

Def : (Monoide) Un monoide in una categoria $(\mathcal{C}, \times)$ è M oggetto con due morfismi $m : M \times M \to M$ e $u : * \to M$ t.c. i seguenti diagrammi commutano

$$\begin{tikzcd} M \times M \times M \arrow[r, "id \times m"] \arrow[d, "m \times id"'] & M \times M \arrow[d, "m"] \\ M \times M \arrow[r, "m"'] & M \end{tikzcd} \quad e \quad \begin{tikzcd} * \times M \arrow[r, "u \times"] \arrow[dr, dash, "\sim"'] & M \times M \arrow[d, "m"] & M \times * \arrow[l, "\times u"'] \arrow[dl, dash, "\sim"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Def : $\mathcal{C}$ categoria, $f \in Mor(\mathcal{C})$: f è isomorfismo se $\exists\, g \in Mor(\mathcal{C})$ t.c. $f \circ g = g \circ f = id$, e g si dice f^{-1}.

(•) ES : dimostrare che, se esiste, f^{-1} è unica

(•) ES : definire un anello come un monoide

ex:
- categoria con un solo oggetti i cui morfismi siano tutti invertibili è un gruppo
- Set : categoria degli insiemi e delle funzioni
  → Problema : l'insieme degli insiemi non è un insieme

  ⇒ U = insieme universo → Set_U Categoria degli insiemi piccoli e delle funzioni.
  S piccolo $\Leftrightarrow S \in U$
- Mon monoidi
- Grp gruppi
- Cat categoria delle categorie piccole: morfismi?

  dove dico $\mathcal{C}$ piccolo se gli oggetti sono piccoli

Def: $\mathcal{C}$ categoria: la categoria opposta $\mathcal{C}^{op}$ è la categoria t.c. 10/04

$$Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C}), \quad Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \quad \forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$$

(•)ES: Dimostrare che è una categoria

Def: $\mathcal{C}$ categoria: $X \in Ob(\mathcal{C})$ si dice finale/terminale se

$$\forall Y \in Ob(\mathcal{C}) \quad \# Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) = 1$$

ex: singoletto

OSS: se $\exists\, X \in Ob(\mathcal{C})$ finale ⇒ è l'unico.

Def: $\mathcal{C}$ categoria, $X \in \mathcal{C}$ si dice iniziale se $\forall Y \in \mathcal{C}, \# Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) = 1$

ex: $\emptyset$

Oss: $X \in \mathcal{C}$ iniziale $\Leftrightarrow X \in \mathcal{C}^{op}$ è finale Dim

ex: $\mathcal{C}$ categoria delle triple (X, f, u) con
- X BANACH reale
- $f : X \oplus X \to X$ $\quad \|x+y\| = \|x\|+\|y\|/2$
- $u \in X : \|u\| \leq 1$
- $f(u,u) = u$

⇒ Chi è l'oggetto iniziale in $\mathcal{C}$?

→ $(L^1[0,1], \gamma, 1)$ ↳ f. costante $\quad : \gamma(f_1, f_2) = \begin{cases} f_1(2t) & t \leq 1/2 \\ f_2(2t-1) & \text{altr.} \end{cases}$

Def: $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorie: si definisce categoria prodotto: $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ che ha

$$Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{D})$$

$$Hom((X,Y),(X',Y')) = Hom_{\mathcal{C}}(X,X') \times Hom_{\mathcal{D}}(Y,Y')$$

Def: $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorie: un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è dato da:

- una funzione $F : \underset{X}{Ob(\mathcal{C})} \longrightarrow \underset{F(X)}{Ob(\mathcal{D})}$
- $\forall X, Y \in \mathcal{C} : \underset{f}{Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)} \longrightarrow \underset{F_f}{Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))}$

t.c. $\forall X,\ F(id_X) = id_{F(X)}$ e $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

(·) **Oss**: (ES) dimostrare che Cat con i funtori come morfismi è una categoria.

Def: un funtore covariante è quello appena definito.
un funtore controvariante è un funtore covariante da $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$

ex: - Funtori "dimenticanti": $Grp \to Set$, $SpVet \to Set$ ...
$Ring \to Set$, $Ring \to GrpAb$

- Funtori "liberi": $Set \to Grp$, $Set \to SpVet$, $Set \to CRing$
anelli di pol

- $Top_* \to Grp$, $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$; $Top \to Ab$, $X \mapsto H_n(X)$

- $P_1, \dots, P_n$ eq. polinomiali in m variabili a coef in $\mathbb{Z}$

$CRing \to Set$
$A \mapsto$ soluzioni delle eq. polinomiali in A^n

Uno schema è un funtore di questo tipo che soddisfa altre proprietà.

- Funtori fra categorie con un solo elemento ≡ morfismi fra monoidi

- X è sp. topologico : $Op(X)$ = categoria degli aperti di X
con oggetti aperti di X, morfismi le inclusioni.
Un prefascio su X è un funtore: $Op(X)^{op} \longmapsto Set$
$U \longmapsto$ funzioni continue $U \to \mathbb{R}$

che agisca sui morfismi per restrizione.

(·) ES dimostrare che i funtori preservano gli isomorfismi
(·) Es caratterizzare gli isomorfismi in Cat

Def: $\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ due funtori: una trasformazione naturale $\alpha: F \Rightarrow G$ è una collezione di morfismi

$F(X) \xrightarrow{\alpha_X} G(X)$ $\forall X \in \mathcal{C}$ tali che $\forall f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$, il quadrato

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F_f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(X) \arrow[d, "G_f"] \\
F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

α è detto "morfismo fra funtori"

(·) ES: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie: costruire una categoria di funtori fra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ con morfismi le trasformazioni naturali.

Def: Sia $\mathcal{C}$ categoria. Una sottocategoria di $\mathcal{C}$ è $S \subset Ob(\mathcal{C})$ e $\forall X, Y \in S$

$Hom_S(X, Y) \subset Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tale che:
- $id_X \in Hom_S(X, X)$
- $f \in Hom_S(X, Y)$, $g \in Hom_S(Y, Z) \Rightarrow g \circ f \in Hom_S(X, Z)$

10/11

(·) es: $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorie: vale

- $\mathrm{Hom}_{Cat}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \cong \mathrm{Hom}_{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}))$ bigezione naturale in $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$.
- $\mathrm{Fun}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \cong \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}))$ equivalenza di categorie

(·) es: G gruppo abeliano, $m: G \otimes_{\mathbb{Z}} G \longrightarrow G$.
Dimostrare che un monoide in $(Ab, \otimes_{\mathbb{Z}})$ è un anello

es: Sia $Ob \in Set$ insieme e definisco con $\mathcal{C}$ la categoria i cui oggetti sono
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Ob & & Ob \end{tikzcd}$$
$\in Set$ e i morfismi:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, red] & \\ Ob \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & Ob \\ & M' \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

ed infine:
$$\begin{tikzcd} & & M \times_{Ob} M' \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddll, red, bend right] \arrow[ddrr, red, bend left] & & \\ & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & M' \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ Ob & & Ob & & Ob \end{tikzcd}$$

Cos'è un monoide in $(\mathcal{C}, \times_{Ob})$? È una categoria.

Ora: $M \times_{Ob} M = \{ (m_1, m_2) \text{ t.c. } g(m_1) = f(m_2) \}$, allora

$m: M \times_{Ob} M \longrightarrow M$ è una mappa
^
Mor

??

$$\begin{tikzcd} & M \times_{Ob} M \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "m"'] & \\ Ob & & Ob \\ & M \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \times M \times M \arrow[r] \arrow[d] & M \times M \arrow[d] \\ M \times M \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

② PROPRIETÁ UNIVERSALI - FUNTORI CORAPPR. - LEMMA DI YONEDA

ex: $\mathcal{C}$ = categoria delle triple (S, s_0, f) con S insieme, $s_0 \in S$, $f : S \to S$.
(sistemi dinamici discreti)

Morfismi: $(S, s_0, f) \xrightarrow{\varphi} (T, t_0, g)$
tali che $\varphi(s_0) = t_0$

e t.c.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[d, "g"] \\ S \arrow[r, "\varphi"] & T \end{tikzcd}$$

Chi è l'oggetto iniziale?

$(\mathbb{N}, 0, succ)$ dove $\forall t$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "succ"'] & T \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{N} \arrow[r, "\varphi"'] & T \end{tikzcd}$$

$g(\varphi(n)) = \varphi(n+1)$
$\Rightarrow \varphi(n) = g^n(\varphi(0))$
ma $\varphi(0) = t_0$ per ip

$\Rightarrow \varphi = g^n(t_0)$ è UNICA

<u>Def</u>: $\mathcal{C}$ categoria localmente piccola, $X \in \mathcal{C}$ allora:

- il <u>funtore</u> (covariante) $\mathcal{C} \to Set$ rappresentato da X è

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & Set \\ Y & & Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \end{array}$$

- il funtore (controvariante) $\mathcal{C}^{op} \to Set$ rappresentato da X è

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} & \longrightarrow & Set \\ Y & & Hom_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{array}$$

(·)es: verificare che sono funtori! (e completarla!)

In generale: $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & Set \\ (X, Y) & \mapsto & Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \end{array}$ è un "bifuntore"

<u>Oss</u>: $X \in \mathcal{C}$ è INIZIALE $\Longleftrightarrow$ $Hom_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ è isomorfo al funtore costante $\{*\}$
$X \in \mathcal{C}$ è FINALE $\Longleftrightarrow$ $Hom_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ è isomorfo al funtore costante $\{*\}$

<u>Def</u>:
- $F : \mathcal{C} \to Set$ si dice rappresentabile se $\exists X \in \mathcal{C} : F \simeq Hom(X, \cdot)$
- $F^{op} : \mathcal{C} \to Set$ si dice rappresentabile se $\exists X \in \mathcal{C} : F \simeq Hom(\cdot, X)$

(Si dice corappresentabile se è covariante, controrappr. se non lo è)

ex:
- $Id : Set \to Set$ è rappresentabile da $\{*\}$:

  $\forall X \in Set : \quad X \simeq Hom(\{*\}, X)$

- $\begin{array}{ccc} P : Set^{op} & \longrightarrow & Set \\ X & \mapsto & P(X) \end{array}$ è rappresentabile da $\{0, 1\}$:

  $\forall X \in Set^{op} : \quad P(X) \simeq Hom(X, \{0, 1\})$

- $\begin{array}{ccc} F : Top^{op} & \longrightarrow & Set \\ X & \mapsto & \{\text{aperti di } X\} \end{array}$ è rappresentabile da $\{0, 1\}$ con $\{0\}$ ap.

  $\forall X \in Top^{op} : \quad \{\text{aperti di } X\} \simeq Hom_{Top}(X, \{0, 1\})$

- $U : Grp \to Set$ funtore dimenticante è rappresentabile da $\mathbb{Z}$

  $\forall G \in Grp : \quad U(G) \simeq Hom_{Grp}(\mathbb{Z}, G)$

- R anello, $U : R\text{-mod} \to \mathrm{Set}$ è rappresentato da R
- $(\cdot)^* : \underset{R}{\mathrm{Ring}} \to \underset{R^*}{\mathrm{Set}}$ si rappresenta come $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], \cdot)$
- $\mathrm{Ob} : \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Cat}} \to \underset{\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}{\mathrm{Set}}$ si rappresenta come $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\overset{\curvearrowright}{\bullet}, \cdot)$

  $\forall\, \mathcal{C} \in \mathrm{Cat} : \quad \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\underset{e}{\overset{\curvearrowright}{\bullet}}, \mathcal{C}) \simeq \{ f(e\} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$
- $\mathrm{Mor} : \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Cat}} \to \underset{\mathrm{Mor}(\mathcal{C})}{\mathrm{Set}}$ si rappresenta come $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\bullet\to\bullet, \cdot)$
- $\underset{X}{\mathrm{Top}} \longrightarrow \underset{\{\text{cammini in } X\}}{\mathrm{Set}}$ si rappresenta come $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(I, \cdot)$
- k campo, $V, W \in \mathrm{Vect}_k$ allora: $\underset{U}{\mathrm{Vect}_k} \longrightarrow \underset{\mathrm{Bil}(V\times W, U)}{\mathrm{Set}}$ rappresentato da $V \otimes_k W$
- $A \in \mathrm{Ab}$, $n \in \mathbb{N}$, $H^n(\cdot, A) : \mathrm{Top}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ab}$

  se chiamo $\mathrm{Top}h$ = spazi topologici e classi di omotopia di funzioni continue.
  $\mathrm{Top}h_{CW}$ = sottocat di CW complessi

  Allora: $H^n(\cdot, A) : \mathrm{Top}h_{CW}^{op} \to \mathrm{Ab}$, $U \circ H^n(\cdot, A) : \mathrm{Top}h_{CW}^{op} \to \mathrm{Set}$ rappresentabile da $K(A, n)$
- $\underset{X}{\mathrm{Top}h_{CW}^{op}} \to \underset{\{G\text{-fibrati principali}\}}{\mathrm{Set}}$ fissato G gruppo top: è rappresentato da BG

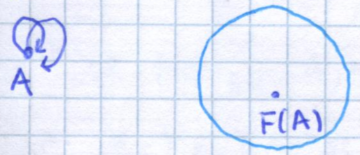
Vorremmo capire meglio cosa vuol dire che $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ è rappresentabile.

ex: G gruppo : BG categoria con un solo oggetto e $\mathrm{Hom}_{BG}(X, X) = G$

- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cat}}(BG^{(op)}, \mathrm{Set}) = ??$
- Chi è l'unico funtore rappresentabile?

$BG \xrightarrow{F} \mathrm{Set}$

10/16



$\mathrm{Hom}_{BG}(A, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(F(A), F(A))$

$\overset{\shortparallel}{G}$ cioè $G \curvearrowright F(A)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Set}) \simeq G$-insiemi sinistri $\ni$ G con molt. a sx ← unico funtore rappres.

$\mathrm{Fun}(BG^{op}, \mathrm{Set}) \simeq G$-insiemi destri $\ni$ G con molt. a dx

Ora: $F \longleftrightarrow X$ G-insieme sx

voglio capire le mappe $G \overset{\varphi}{\to} X$ equivarianti:

se conosco $\varphi(e) \in X \Rightarrow \forall g \in G : \varphi(g) = g \cdot \varphi(e)$

$\Rightarrow$ $F : BG \to \mathrm{Set}$: una trasf naturale $\mathrm{Hom}_{BG}(A, \cdot) \overset{\alpha}{\Rightarrow} F$ corrisponde a un el di $F(A)$

→ la corr. mandando $\alpha \mapsto \alpha_A(\mathrm{id}_A) \in F(A)$

In generale: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \xrightarrow{\alpha} F \rightsquigarrow$
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) & \xrightarrow{\alpha_X} & F(X) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ \mathrm{id}_X & \mapsto & \alpha_X(\mathrm{id}_X) \end{array}$$

$$\Rightarrow \phi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathrm{Set})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-), F) \longrightarrow F(X)$$
$$\alpha \qquad\qquad \alpha_X(\mathrm{id}_X)$$

Voglio capire se ha una inversa:

$x \in F(X)$: voglio $\alpha = \Psi(x) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \longrightarrow F$

cioè: $\forall\, Y \in \mathcal{C}$: devo definire $\Psi(x)_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to F(Y)$

tali che $\forall\, Z \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(Y) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[r, "\alpha_Z"'] & F(Z) \end{tikzcd}$$

Posso considerare:
$\forall f : X \to Y$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & F(X) \ni x \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Voglio $\Psi(x)_X(\mathrm{id}_X) = x$ + comm: $F(f)(x) = \Psi(x)_Y(f)$

$\Rightarrow$ Definisco $\Psi(x)_Y(f) = F(f)(x) \quad \forall f : X \to Y \quad \forall\, Y \in \mathcal{C}$

e $\forall g : Y \to Z$ vale: $Fg(Ff(x)) = (Fg \circ Ff)(x) = F(g \circ f)(x)$ ✓

$\Rightarrow$ Ho: $\Psi : F(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathrm{Set})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-), F)$

e per costruzione: $\phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$

Cosa so su $\Psi \circ \phi$?

Voglio che $\forall \alpha$: $\alpha = \Psi(\alpha_X(\mathrm{id}_X))$ ovvero che

$\forall Y$:
$$\begin{tikzcd} \alpha_Y : \mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r] & F(Y) \\ \Psi(\alpha_X(\mathrm{id}_X))_Y : \mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
siano lo stesso funzione

$\Rightarrow \forall f : X \to Y$ voglio $\alpha_Y(f) = Ff(\alpha_X(\mathrm{id}_X))(f)$

ma
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X,X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(X) \arrow[d, "Ff"] \\ \mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$
commuta perché α trasf. naturale

$\Rightarrow \Psi \circ \phi = \mathrm{Id}$

Abbiamo (quasi) dimostrato:

Lemma di Yoneda: $X \in \mathcal{C}$, $F : \mathcal{C} \to Set$: c'è una bigezione naturale

$$\mathrm{Hom}_{Fun(\mathcal{C}, Set)}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F) \simeq F(X)$$

$$\alpha \qquad\qquad \alpha_X(id_X)$$

Manca solo far vedere che è naturale

$\forall \beta : F \Rightarrow G$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{Fun(\mathcal{C},Set)}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot),F) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\beta_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & FX \arrow[d, "\beta_X"] \\
\mathrm{Hom}_{Fun(\mathcal{C},Set)}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot),G) \arrow[r, "\sim"] & GX
\end{tikzcd}$$

trasf. naturale in F

$\forall f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{Fun(\mathcal{C},Set)}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot),F) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tilde{f}^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & FX \arrow[d, "Ff"] \\
\mathrm{Hom}_{Fun(\mathcal{C},Set)}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\cdot),F) \arrow[r, "\sim"] & FY
\end{tikzcd}$$

trasf. naturale in X

dove : $\tilde{f} : \mathrm{Hom}(Y,-) \Rightarrow \mathrm{Hom}(X,-)$

(·) es: riformulare il lemma di Yoneda con un isomorfismo naturale

Cor: I funtori : $\mathcal{C} \to Fun(\mathcal{C}^{op}, Set)$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ e $\mathcal{C}^{op} \to Fun(\mathcal{C}, Set)$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$

sono pienamenti fedeli

(·) es: Enunciare e dimostrare la forma duale del lemma di Yoneda (per funtori da $\mathcal{C}^{op} \to Set$)

Il corollario ci dice che ~~per~~ conoscere X è equivalente a conoscere $\mathrm{Hom}(\cdot, X)$.

(·) es: dimostrare il cor.

ex: G gruppo : $BG \to Fun(BG^{op}, Set) \cong G$-insiemi dx

$A \mapsto G$ con molt a dx

$\to \mathrm{Hom}_{BG}(A,A) \simeq$ endomorfismi di G equivarianti ($\Rightarrow$ Cayley)

Cor: $X, Y \in \mathcal{C}$: se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-)$ o $\mathrm{Hom}(-,X) \simeq \mathrm{Hom}(-,Y)$
$\Rightarrow X \simeq Y$

10/18

ex: $\Bbbk$ campo, $V, W \in Vet_{\Bbbk}$, $Bilin(V, W; -) : Vet_{\Bbbk} \to Set$ è rappresentabile

Infatti: $Bil(V,W;U) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes W; U)$

Per Yoneda: $\otimes \in Bilin(V, W; V \otimes W)$ $[\, V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes W \,]$

E inoltre vale $\forall U \in Vet_{\Bbbk}$, $f \in Bilin(V, W; U)$:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d] & V \otimes W \arrow[dl, "\exists ! g"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

C'è una categoria $\boxed{\text{Coni}(-,F)}$ con Ob = coni sopra F
Mor = morfismi fra i vertici che fanno commutare tutti i triangoli

e analogamente coni$(F,-)$.

Def2: $F: I \to \mathcal{C}$, allora:

- Un limite di F è un OGGETTO FINALE di coni$(-,F)$
- Un colimite di F è un OGGETTO INIZIALE di coni$(F,-)$

Devo far vedere che le due definizioni coincidono:

L_2 oggetto finale di coni$(-,F)$:

$\forall (Z,\alpha) \in$ coni$(-,F)$:

$$\begin{tikzcd} L_2 \arrow[r, Rightarrow, "\lambda_2"] & F \\ & Z \arrow[ul, Rightarrow, "\exists! f"] \arrow[u, Rightarrow, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

L_1 limite di coni$(-,F) \overset{\text{naturale}}{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-,L_1)$

Per Yoneda: $\lambda_1 \in$ coni(L_1,F)
(?)
che corrisponde alla bigezione naturale
$(\alpha_X(\text{id}_{L_1}) = \lambda_1]$

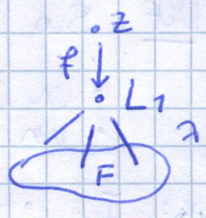
$$L_1 \overset{\lambda_1}{\Rightarrow} F$$

- Dimostro che L_1, $\lambda_1 : L_1 \Rightarrow F$ è oggetto finale di coni$(-,F)$:

$\forall (Z,\alpha)$ cono sopra F : $\text{Hom}(Z,L_1) \cong$ coni(Z,F)

$$f \longleftarrow \overset{\Psi}{\alpha}$$

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, Rightarrow, "\lambda_1"] & F \\ & Z \arrow[u, Rightarrow, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$



dove $f: Z \to L_1$ costruito in modo che "$\lambda \circ f$" $= \alpha$

10/25

$$\begin{tikzcd} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim F, \lim F) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f_*"] & \text{Coni}(\lim F, F) \arrow[d] \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \lim F) \arrow[r, "\sim"] & \text{Coni}(Y,F) \end{tikzcd}$$

$\lambda_1 \mapsto \alpha$, f

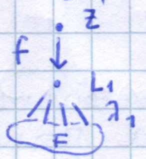
$\lim F = L_1$

$\to \forall$ cono (Y,e) $\exists!\, f$ t.c. $f: Z \to \lim F$ e α è l'immagine di λ tramite f

- Devo dimostrare che (L_2,λ_2) rappresenta coni$(-,F)$: $\forall Z$ Coni$(Z,F) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,L_2)$

Definisco $\text{Coni}(Z,F) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,L_1)$
$(Z,\alpha) \mapsto$ <u>unica</u> f che fa commutare

e osservo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,L_1) \xrightarrow{\beta_Z^{-1}} \text{Coni}(Z,F)$ è l'inversa
$f: Z \to L_1 \mapsto$



Si verifica che β_Y definiscono una trasformazione naturale.

Oss: $F : I \to \mathcal{C}$ e X, X' limiti per $F \Rightarrow \exists! \; X \cong X'$ isomorfismo

ex: * $I = \emptyset$, $F : \emptyset \to \mathcal{C}$: $\mathrm{Coni}(-, F) \simeq \mathcal{C}$: X limite per $F \iff X$ finale

X diagrammi cost di F ↑ con $X \underset{\circ}{\Rightarrow} F$, ma $X \in \mathcal{C}$

* $I = \bullet \;\; \bullet$, $F : I \to \mathcal{C} \equiv$ due ogetti $X, Y \in \mathcal{C}$: $\lim F =$ "prodotto fra X, Y" $= X \times Y$

ed in effetti in Cat, Set, Top, Grp, Ab, il prodotto $X \times Y$ è effettivamente $\lim F$

$X \in$ Set : un preordine è una relazione binaria, transitiva, riflessiva

$$\Rightarrow X \in \mathrm{Cat} \text{ con } \mathrm{Hom}_X(x, y) = \begin{cases} * & \text{se } x \leq y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In un preordine : $x \times y$ è l'inf di X rispetto a $\leq$ (se esiste)

$\mathrm{colim}\, F =$ "coprodotto fra X, Y" $= X \amalg Y$

in Set, Top $\amalg$ è l'unione disgiunta $\sqcup$
in Top_* : $\amalg$ è la somma wedge $\vee$
(incollamento per un pt)
in Grp : $\amalg$ è il prodotto libero $*$
in CRing_k : $\amalg$ è il prodotto tensore $\otimes_k$

* $I : \bullet \to \bullet$; $F : I \to \mathcal{C} \equiv X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$: $\lim F = X$, $\mathrm{colim}\, F = Y$

$$\begin{tikzcd} & & \overset{\bullet}{Z} \arrow[dll] \arrow[d, dashed] \\ G \overset{\bullet}{X} \arrow[rr] & & \overset{\bullet}{Y} \end{tikzcd}$$

In generale se la categoria I ha un oggetto iniziale
$\Rightarrow \lim F = F(\text{ogg. iniziale di } I)$ esiste sempre

* $I : \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \end{tikzcd}$, $F \equiv X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$: un cono sopra F è $Z \xrightarrow[h]{} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \longrightarrow$

tale che $f \circ h = g \circ h$

$\Rightarrow \lim F :=$ "equalizzatore di f, g"

in Set : $\lim F = \{ x \text{ t.c. } f(x) = g(x) \}$
in Grp, Top uguale
in Ab : $\lim F = \ker(f - g)$

e $\mathrm{colim}\, F :=$ "coequalizzatore di f, g"

in Set : $\mathrm{colim}\, F = Y \big/ \substack{\text{rel d'eq generato} \\ \text{da } fx \sim gx \;\; \forall x \in X}$ $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r] \arrow[dr, "h"'] & \mathrm{colim}\, F \arrow[d] \\ & & W \end{tikzcd}$$

$\bar{g}$ $f(y)$

in Top : uguale
in Ab : $\mathrm{colim}\, F = Y \big/ (f - g) X$

* $I = \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$, $F \equiv X \xrightarrow[f]{} Z \xleftarrow[g]{} Y$ $\mathrm{colim}\, F = Z$ (oggetto finale di I)

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "j"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \lim F =$ "pullback di X, Y su Z"
$=$ "prodotto fibrato di X, Y su Z" $= X \times_Z Y$

t.c. $fh = gj$

$$\begin{tikzcd} \lim F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner" very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

vuol dire che è il lim

in Set : $\lim F = \{ (x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y) \}$

$\forall$ cono $\begin{tikzcd} W \arrow[r, "j"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$: $\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & \lim F \\ w & & (h(w), j(w)) \end{array}$

in Top : abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{R} \arrow[d] & x \arrow[d, mapsto] \\
* \arrow[r, "1"'] & S^1 & e^{2\pi i x}
\end{tikzcd}$$

dove in $\mathbb{Z}$ ho la topologia disc

in Ab : abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot a"] \arrow[d, "\cdot b"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\cdot m"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot n"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

dove $am = bn = \text{mcm}(m,n)$

$\{(x,u) : nx = my$

* Dualmente i colimiti su diagrammi di forma $I = \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$ si chiamano pushout

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & \operatorname{colim} F \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

In Top : abbiamo

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r] \arrow[d] & S^1 \arrow[d] \\
S^1 \arrow[r] & S^1 \vee S^1 \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

$S^1 \vee S^1$ = coprodotto $(S^1, 1), (S^1, 1)$ in Top_*

10/30

In Grp : abbiamo

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\
Q \arrow[r] & P *_G Q
\end{tikzcd}$$

$P *_G Q$ = prodotto amalgamato di P, Q lungo G

In CAlg_K abbiamo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
C \arrow[r] & B \otimes_A C
\end{tikzcd}$$

$B \otimes_A C$ = prodotto tensoriale

* $I = \omega = 0 \to 1 \to 2 \to \cdots$, $F : I \to \mathcal{C}$

$\operatorname{colim}_I F$ = "limite diretto/ ~~proiettivo~~ iniettivo / induttivo" $=: \varinjlim F$

$I = \omega^{op} = 0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow \cdots$, $F : I \to \mathcal{C}$

$\lim_I F$ = "limite inverso/ proiettivo" $=: \varprojlim F$

In Ring $\cdots \to \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $\varprojlim \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$

$\cdots \to \mathbb{R}[t]/(t^2) \to \mathbb{R}[t]/(t)$: $\varprojlim \mathbb{R}[t]/(t^i) = \mathbb{R}[[t]]$

(·) es:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
C \arrow[r] & D \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

diagramma in $\mathcal{C}$ (commutativo) :

1. Se i due quadrati piccoli sono cartesiani, allora anche quello grande lo e'.
2. Se il quadrato di dx e quello grande sono cartesiani, allora anche quello di sx lo e'

(·) es: Costruire gli equalizzatori in termini di pullback

– Costruire limiti

$\boxed{\mathcal{C} = Set}$

Def: Una categoria $\mathcal{C}$ si dice
- completa, se ammette tutti i limiti piccoli
- cocompleta, se ammette tutti i colimiti piccoli

Teo: Set è completa

Dim: $F: I \to \mathcal{C}$: un limite di F è un insieme $\lim F$ t.c.

$$\forall X \in Set \quad Hom_{set}(X, \lim F) \overset{(\circ)}{\simeq} coni(X, F)$$

Per $X = \{*\}$ $(\circ) \Rightarrow \lim F \simeq Coni(*, F) \longrightarrow \lim F := Coni(\{*\}, F)$
e dimostro che funziona

In Set il funtore id è rappresentabile

Guardo $Coni(\{*\}, F)$: $\forall i \in I$ voglio $Coni(\{*\}, F) \xrightarrow{\lambda_i} F_i$
$\alpha \mapsto (\alpha_i : \{*\} \to F_i)$
$\alpha_i \in F_i$

$(\cdot)$ Verifica che $\lim F \overset{\lambda}{\Longrightarrow} F$ (É UN CONO)

Verifichiamo che è un CONO UNIVERSALE:

Sia $X \overset{\beta}{\Rightarrow} F$, $X \in Set$, voglio dimostrare che $\exists!$ $X \xrightarrow{f} \lim F$
mappa fra coni che fa commutare

$\forall x \in X$: β induce un cono di vertice x, ovvero
$\forall \{*\} \xrightarrow[\cdot x]{} X$ ho un cono indotto $\{*\} \underset{\beta x}{\Longrightarrow} F \in \lim F$

Questo mi definisce $f: \underset{x}{X} \to \underset{\beta x}{\lim F}$ e

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta"'] & \lim F \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"] \\ & F \end{tikzcd}$$

$$\lambda_i f(x) = \lambda_i(\beta x) = (\beta x)_i = \beta_i(x)$$

ex: $F: BG \to Set$ è un G-insieme X con azione a sx. $\lim F$?

Un Cono(Z, F) :
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & X \end{tikzcd}$$
$\forall g: X \to X \Longrightarrow \lim F = X^G$

Oss: in Set, il pullback di
$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$
è anche l'equalizzatore di $B \times C \overset{f(b)}{\underset{g(c)}{\rightrightarrows}} A$

Teo: ogni limite in Set si scrive come un equalizzatore.
[cioè $\forall F: I \to set$, $\lim F$ = equalizzatore di $\prod_{i \in I} F(i) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \prod_{\varphi \in Mor(I)} F(\overset{\text{target}}{\hat{t}}(\varphi))$]

Dim: Chi sono f e g? Sono mappe nel prodotto, quindi
una collezione di mappe in ogni fattore

$\varphi \in Mor(I)$: $f_\varphi : \prod_{i \in I} F(i) \twoheadrightarrow F(t(\varphi)) \rightsquigarrow f$

$$\begin{tikzcd} \prod_{i \in I} F(i) \arrow[r] \arrow[dr] & F(t(\varphi)) \\ & F(s(\varphi)) \arrow[u, "F\varphi"'] \end{tikzcd}$$
$g_\varphi : \prod_{i \in I} F(i) \to F(t(\varphi)) \rightsquigarrow g$

Dim: $\lim F \simeq \mathrm{Coni}(*,F) \hookrightarrow \prod_{i\in I} F(i)$ (il cono $\alpha \mapsto (\alpha_i)$) $: \lim F \subset \prod_{i \in I} F(i)$

e $\lambda \in \lim F$: $\lambda = (\lambda_i \in F_i)_{i \in I}$ t.c.

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F\varphi"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\circlearrowright"] & & F(j) \end{tikzcd}$$

$\forall \varphi \in \mathrm{Mor}\, I \quad F\varphi \circ \lambda_{s(\varphi)} = \lambda_{t(\varphi)}$

Cioè $\lim F = \{ \lambda \in \prod F(i) \text{ t.c. } F\varphi(\lambda_{s(\varphi)}) = \lambda_{t(\varphi)} \}$

$= \{ \lambda \in \prod F(i) \text{ t.c. } \forall \varphi \in \mathrm{Mor}\, I : \; g_\varphi(\lambda) = f_\varphi(\lambda) \}$

$= \{ \lambda \in \prod F(i) \text{ t.c. } g(\lambda) = f(\lambda) \}$ equalizzatore

es: $\mathcal{C}$ categoria, $f: X \to Y$, $g: Z \to W$ morfismi di $\mathcal{C}$.

Costruire l'insieme $\mathrm{DiagComm}(f,g) = \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd} \right\}$ come pullback in Set

$$\begin{tikzcd} \mathrm{DiagComm}(f,g) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Hom}(Y,W) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{Hom}(X,Z) \arrow[r, "g_*"] & \mathrm{Hom}(X,W) \end{tikzcd}$$

Def: $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtore, si dice che F

- preserva i limiti se $\forall$ diagramma $K: I \to \mathcal{C}$
  $\forall$ cono limite $\lim K \Rightarrow K$ in $\mathcal{C}$

  $\Rightarrow F(\lim K) \Rightarrow FK$ è un cono limite in D
- riflette i limiti se $\forall$ diagramma $K: I \to \mathcal{C}$
  $\forall$ cono $X \Rightarrow K$ in $\mathcal{C}$

  se $FX \Rightarrow FK$ è un cono limite $\Rightarrow X \Rightarrow K$ è un cono limite
- crea i limiti se riflette i limiti e

  FK ha limite in $D \Rightarrow \exists$ cono limite sopra FK che può essere sollevato a un cono limite sopra K

(·)es: che tipi di funtori sono i funtori dimenticanti?

$F: I \to \mathrm{Set}$ allora $\lim F \to \prod_{i \in I} F_i \rightrightarrows \prod_{\varphi \in \mathrm{Mor}\, I} F(t(\varphi))$

11/06

Guardiamo i funtori dimenticanti:

$U: \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ conserva i $\underset{\times}{\text{prodotti}}$ e i $\underset{\sqcup}{\text{coprodotti}}$

- NON RIFLETTE I LIMITI: $X, Y \in \mathrm{Top} \Rightarrow U(X) \times U(Y) \in \mathrm{Set}$
  ma posso mettere tante topologie su $X \times Y$

Ad esempio $\begin{tikzcd} & (X \times Y)_{disc} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$ in Top $\to$ $\begin{tikzcd} & U(X) \times U(Y) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ U(X) & & U(Y) \end{tikzcd}$ è il prodotto in Set

se X, Y non hanno top discreta (no)

Guardiamo i funtori liberi:

(◦) $V : \mathrm{Set} \to \mathrm{Vet}_K$ preservano i colimiti (e in generale non i limiti)

(·) **es**: I funtori pienamente fedeli riflettono limiti e colimiti

Prop: $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtore con $\mathcal{D}$ completa.
Se F crea i limiti $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è completa e F preserva i limiti

Dim: $K : I \to \mathcal{C}$ diagramma piccolo $\Rightarrow$ $FK : I \to \mathcal{D}$ diagramma in $\mathcal{D}$

- $\mathcal{D}$ completa $\Rightarrow \exists\ Y \Rightarrow FK$ cono limite in $\mathcal{D}$
- F "crea i limiti" : $\exists\ X \Rightarrow K$ cono limite in $\mathcal{C}$ t.c. $(F(X) \Rightarrow FK) \simeq (Y \Rightarrow FK)$

$\to$ $\mathcal{C}$ completa

Prendo $X' \Rightarrow K$ cono limite : sappiamo che $X \Rightarrow K$ è un cono limite

$\Rightarrow$ $X' \Rightarrow K \simeq X \Rightarrow K \to F(X' \Rightarrow K) \simeq F(X \Rightarrow K) \simeq Y \Rightarrow FK$ che è un cono lim

$\to$ $F(X' \Rightarrow K)$ è un cono limite.

ex: $X \in \mathrm{Top}$, $Ap(X)$ = categoria degli aperti di X con le inclusioni

$U \in Ap(X)$: un $\{U_i\}_{i\in I} \subset Ap(X)$ si chiama ricoprimento di U se U è il colimite del diagramma formato da tutte le inclusioni:

$$\begin{tikzcd}
U_i & & U_j \\
& U_i \cap U_j \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$i, j \in I$ (*)

Def: un funtore $F : Ap(X)^{op} \to \mathrm{Set}$ ("prefascio") si chiama
FASCIO DI INSIEMI su X se preserva i colimiti della forme (*)

F fascio se $\forall$ ricoprimento $\{U_i\}$ di U, $F(U)$ è lim di un diagramma che coinvolge $F(U_i)$ e $F(U_i \cap U_j)$

In Set sappiamo che questo equivale a dire che il seguente diagramme è un cono limite:

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j)$$

(es: verificare che è equival)

Consideriamo $K : I \to \mathcal{C}$ diagramma e fisso $X \in \mathcal{C}$:

$$I \xrightarrow{K} \mathcal{C} \xrightarrow{Hom(X,-)} \mathrm{Set}$$

questo ha un limite in Set

$\Rightarrow$ il limite è dato dagli el (λ_i) di $\prod_i Hom_{\mathcal{C}}(X, Ki)$ tali che

$\forall\ i \to j \in I$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\
Ki \arrow[rr] & \circlearrowright & Kj
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $Coni(X, K) \simeq \lim Hom_{\mathcal{C}}(X, K(-))$

in Set

Se K ha lim in $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $Hom_{\mathcal{C}}(X, \boxed{\lim K}) \simeq Coni(X, \mathcal{C}) \simeq \boxed{\lim Hom_{\mathcal{C}}(X, K(-))}$

Cor 1: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ preserva i limiti

(◦) **Cor 2**: L'immersione di Yoneda : $\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}) =: \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$
preserva e riflette i limiti

(◦) **es**: Cosa sono i limiti in $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set})$?

$$I \xrightarrow{K} \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}} : \lim K \in \mathrm{Set}^{op} \Rightarrow (\lim_I K)(X) = \lim_I \overbrace{K_i(X)}^{\in \mathrm{Set}} \leftarrow \text{da DIMOSTRARE}$$

Questo ci dice che $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ è completa

(◦) **es**: Convincersi che $\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set})$ non crea limiti

Dualmente: $K : I \to \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$ allora $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim}\, K, X) \simeq \lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K_i, X)$

Cor 1: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ manda colim in lim ($\mathrm{Hom}(\cdot, X) : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ preserva i limiti)

Cor 2: $\mathcal{C}^{op} \hookrightarrow \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ di Yoneda preserva e riflette i limiti

Teo: $\mathcal{C}$ categoria, $K : I \to \mathcal{C}$ diagramma piccolo. allora
se la seguente espressione ha senso,

$$\lim K \longrightarrow \prod_i K_i \rightrightarrows \prod_{\varphi \in \mathrm{Mor}\, I} K(t(\varphi))$$

è un equalizzatore.

Dualmente, se la seguente espressione ha senso

$$\coprod_{\varphi \in \mathrm{Mor}\, I} K(s(\varphi)) \rightrightarrows \coprod_i K_i \longrightarrow \mathrm{colim}\, K$$

è un coequalizzatore

Cor Ogni categoria che ammette prodotti ed equalizzatori è completa.

e dualmente, ogni categoria che ammette coprodotti e coequalizzatori è cocompleta

Cor 2: Set è cocompleta

Cor 3: Top è completa e cocompleta (dimostrarlo)

Dim (TEO) Traccia:

$$E \longrightarrow \prod_i K_i \rightrightarrows \prod_\varphi K(t\varphi) \quad \text{equalizzatore}$$

Voglio dimostrare che se esiste E allora $\lim K = E$
Guardo:

$$\mathrm{Hom}(-, E) \to \mathrm{Hom}(-, \prod_i K_i) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(-, \prod_\varphi K(t\varphi))$$

$$\mathrm{Hom}(-, E) \to \prod_i \mathrm{Hom}(-, K_i) \rightrightarrows \prod_\varphi \mathrm{Hom}(-, K(t\varphi))$$

(*)

ma allora $\mathrm{Hom}(X, E) \to \prod_i \mathrm{Hom}(X, K_i) \rightrightarrows \prod_\varphi \mathrm{Hom}(X, K(t\varphi)) \to$ $\mathrm{Hom}(X, E) \simeq \mathrm{Hom}(X, \lim K)$

(·) **es** : $F : BG \to \mathrm{Set}$ G gruppo : chi è $\operatorname{colim} F$?

(*) qua si conclude dicendo

11/08

$$\mathrm{Hom}(X, E) \simeq \lim \mathrm{Hom}(X, K_i) \simeq \mathrm{Coni}(X, K) \Rightarrow E = \lim K$$

(·) **es** : Se una categoria ammette prodotti fibrati e oggetti terminali allora $\mathcal{C}$ ammette tutti i limiti finiti $\to \# I < +\infty$

(·) **es** : "Perchè abbiamo parlato solo di limiti / colimiti piccoli" ?

④ AGGIUNZIONI

ex: $\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[r, bend left, "V"] & \mathrm{Vec}_k \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$ $S \in \mathrm{Set}, W \in \mathrm{Vec}_k \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vec}}(V(S), W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(S, U(W))$

$f : S \to T$ funzione in Set :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vec}}(V(S), W) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(S, U(W)) \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vec}}(V(T), W) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(T, U(W)) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$A, B, C \in \mathrm{Set}$: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(A \times B, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$

$M, N, P \in R\text{-mod}$: $\mathrm{Hom}_{R\text{-mod}}(\otimes , P) \simeq \mathrm{Hom}_{R\text{-mod}}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$

Def : $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie : un'aggiunzione d $\mathcal{C}$ $\mathcal{D}$, è il dato di due funtori $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ ed un isomorfismo naturale $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ $\forall X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$

Notazione : $\underline{\underline{F}} \dashv \boxed{G}$ ← aggiunto destro

↖ aggiunto sini

Equivalentemente si può vedere come

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}(F(\cdot), \cdot)"{name=A}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Hom}(\cdot, G(\cdot))"'{name=B}] & \mathrm{Set} \arrow[from=A, to=B, Rightarrow, "\wr"] \end{tikzcd}$$

ex:
- funtori liberi/dimenticanti : $\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Vec}_k \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Grp} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} \mathrm{Grp} \arrow[r, bend left, "\mathbb{Z}[-]"] & \mathrm{Ring} \arrow[l, bend left, "(-)^*"] \end{tikzcd}$
- $S \to R$ di anelli : $\begin{tikzcd} S\text{mod} \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "\perp"] & R\text{-mod} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$
- $\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[r, "U"] & \mathrm{Set} \arrow[l, bend right=60, "\mathcal{L}"'] \arrow[l, bend left=60, "R"] \end{tikzcd}$: vogliamo costruire un aggiunto sx a U, $\mathcal{L} : \mathrm{Set} \to \mathrm{Top}$ tale che

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\mathcal{L}(S), X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(S, U(X))$$

ad esempio $\mathcal{L}(S) := S$ con la topologia discreta

Cerchiamo anche $R : \mathrm{Set} \to \mathrm{Top}$ t.c. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(U(X), S) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X, R(S))$
ad esempio $R(S) := S$ con la topologia banale

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[r, "U"] & \mathrm{Set} \arrow[l, bend right=60, "\mathcal{L}"', "\perp"] \arrow[l, bend left=60, "R", "\perp"'] \end{tikzcd}$$

- $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ inclusione di posets : $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{L}(\alpha), n) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\alpha, n)$
  quindi vogliamo $\mathcal{L}(\alpha) \leq n \Leftrightarrow \alpha \leq n$ ad esempio $\mathcal{L}(\alpha) = \lceil \alpha \rceil$

$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook] & \mathbb{R} \arrow[l, bend right=60, "\lceil \cdot \rceil"', "\perp"] \arrow[l, bend left=60, "\lfloor \cdot \rfloor", "\perp"'] \end{tikzcd}$ e analog $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(n, \alpha) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(n, R(\alpha))$: $n \leq \alpha \Leftrightarrow n \leq R(\alpha)$: $\lfloor \cdot \rfloor$

(·) es:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Set} \\ \mathrm{Field} \arrow[ur, bend left] \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "(\cdot)^*"] \arrow[ddr, bend right] & \mathrm{Ab} \\ & \mathrm{Ab} \\ & \mathrm{Ring} \end{tikzcd}$$

Nessuna queste ha aggiunti destri / sinistri.

$\mathbb{Z} \to U(\mathbb{F}_p)$ esiste $\forall p \Rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{F}_p \; \forall p$

Non può esistere $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$

- $X \in \mathrm{Set}$, $\Omega = \{V, F\}$: $\Omega^X = \{ f : X \to \Omega \} \to p, q \in \Omega^X$ allora:

  $F \leq V$ ← ordinazione logica

  $p \leq q \Leftrightarrow p(x) \leq q(x) \; \forall x \in$

  $\Longleftrightarrow (p \Rightarrow q)$

Ci sono due funtori: $\Omega^X \overset{\forall_X}{\underset{\exists_X}{\rightrightarrows}} \Omega$

dove $\forall_X (P) = V \Leftrightarrow P(x) = V \; \forall x \in X$

$\exists_X (P) = V \Leftrightarrow \exists \, x \in X$ t.c. $P(x) = V$

Inoltre troviamo $\Delta : \Omega \to \Omega^X$: $\Delta(V) = \{ f \equiv V \}$, $\Delta F = \{ f \equiv F)$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\perp\Delta"] & \Omega^X \arrow[l, bend right=60, "\exists_X"'] \arrow[l, bend left=60, "\forall_X", "\perp"'] \end{tikzcd}$$

$\exists_X P \leq V \;\; \forall P$ $\qquad$ $P \leq \Delta V \;\; \forall P$

$\mathrm{Hom}_\Omega (\exists_X (P), V) \simeq \mathrm{Hom}_{\Omega^X} (P, \Delta V)$

$\mathrm{Hom}_\Omega (\exists_X (P), F) \simeq \mathrm{Hom}_{\Omega^X} (P, \Delta F)$

$\exists_X (P) \leq F \Leftrightarrow P \equiv F$ $\qquad$ $P \leq \Delta F \Leftrightarrow P \equiv F$

- $\mathrm{Set}^{BG} \simeq G$-insieme

  $\mathrm{Vec}^{BG} \simeq$ rappresentazioni di G

- $\varphi : G \to H$ morfismo di gruppi: $\begin{tikzcd} \mathrm{Vec}^{BG} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Ind}", "\perp"'] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Coind}"', "\perp"] & \mathrm{Vec}^{BH} \arrow[l, "\mathrm{Res}"'] \end{tikzcd}$

- $\begin{tikzcd} \mathrm{Ob} : \mathrm{Cat} \arrow[r] & \mathrm{Set} \arrow[l, bend right=50, "\mathcal{L}"'] \arrow[l, bend left=50, "\mathcal{R}"] \end{tikzcd}$: chi sono gli aggiunti dx e sx?

  $\mathcal{L}(S)$ = categoria con oggetti di S e solo mappe id

  $\mathcal{R}(S)$ = categoria con oggetti di S e tutte le mappe

$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ t.c. $\forall X \in \mathcal{C}$: $\mathrm{Hom}_\mathcal{D} (F(X), \cdot) \xrightarrow[\simeq]{\psi^X} \mathrm{Hom}_\mathcal{C} (X, G(\cdot))$

quindi $\mathrm{Hom}_\mathcal{C} (X, G(\cdot))$ è rappresentato da $F(X)$ e per Yoneda abbiamo che l'isomorfismo corrisponde a

$\eta_X : X \to GFX$ che viene da $id \in \mathrm{Hom}_\mathcal{D} (FX, FX)$

es: le η_X formano una trasf. naturale $Id_\mathcal{C} \overset{\eta}{\Rightarrow} GF$

$\forall f : X \to X'$ in $\mathcal{C}$, allora voglio

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & GFX \arrow[d, "GF(f)"] \\ X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & GFX' \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Ora dico che (1) commuta se e solo se:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "id"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & FX \arrow[d, "Ff"] \\ FX' \arrow[r, "id"] & FX' \end{tikzcd}$$

che è vero

- Dimostriamo (·)

Lemma: In generale:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ FX' \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & GY \arrow[d, "G\psi"] \\ X' \arrow[r, "\tilde{g}"'] & GY' \end{tikzcd}$$

commuta $\qquad$ commuta

se abbiamo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

Dim:

$$\begin{tikzcd} f \in & Hom(FX, Y) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "\psi^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Hom(X, GY) \arrow[d, "G\psi^*"] & \ni \tilde{f} \\ g \circ F\varphi \in \\ \psi \circ f \in & Hom(FX, Y') \arrow[r, phantom, "\simeq"] & Hom(X, GY') & \ni \tilde{g} \circ \varphi \\ & & & \ni G\psi \circ \tilde{f} \\ g \in & Hom(FX', Y') \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[u, "F\varphi_*"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & Hom(X', GY') \arrow[u, "\varphi_*"'] & \ni \tilde{g} \end{tikzcd}$$

commuta perché $Hom(F(X), \cdot) \simeq Hom(X, G(\cdot))$ è trasf. naturale

Adesso: (f, g) sta nel pullback a sx $\Leftarrow\!\!\!\Rightarrow$ $(f, \tilde{g})$ sta nel pullback a dx

Questo ci dice che data $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ troviamo $Id_{\mathcal{C}} \overset{\eta}{\Longrightarrow} GF$ "unità" (·)

Dualmente: $Hom(F(\cdot), Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(\cdot, GY)$ e come prima, via Yoneda troviamo:

$$\varepsilon_Y : FGY \to Y$$

ed esattamente come prima si dimostra: $FG \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} Id_{\mathcal{D}}$ "counità" (·)

- $Fld \xrightarrow{U} Dom^{monom}$ ha un aggiunto sx

11/13

(·) es: scrivere (co)unità negli esempi già visti

$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, bend left, "V"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Vect_k \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$: $\eta_X : X \to UVX$, $\varepsilon_W : VUW \to W$ sommare

$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$: $F \dashv G \Leftarrow\!\!\!\Rightarrow \exists\ \eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF,\ \varepsilon : \quad \Rightarrow Id_{\mathcal{D}}$ t.c.

$$G \overset{\eta G}{\Longrightarrow} GFG \overset{G\varepsilon}{\Longrightarrow} G, \quad F \overset{F\eta}{\Longrightarrow} FGF \overset{\varepsilon F}{\Longrightarrow} F$$

sono l'identità

Dim: $(\Rightarrow)$ $(F\eta)_X : FX \xrightarrow{F\eta_X} FGFX$

$(\varepsilon F)_X : FGFX \xrightarrow{\varepsilon_X} FX$ $\qquad$: $\varepsilon F \circ F\eta = id \Leftarrow\!\!\!\Rightarrow \forall X\ (\varepsilon F)_X \circ (F\eta)_X = id_{FX}$

Ma ora $(\varepsilon F)_X (F\eta_X) = \varepsilon_{FX} F\eta_X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & GFX \arrow[d, "id"] \\ GFX \arrow[r, "id"'] & GFX \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} FX \arrow[r, "id"] \arrow[d, "F\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & FX \arrow[d, "id"] \\ FGFX \arrow[r, "\varepsilon_{FX}"'] & FX \end{tikzcd}$$

$(\Leftarrow)$ $f : FX \to Y \rightsquigarrow \tilde{f} : X \xrightarrow{\eta_X} GFX \xrightarrow{GF} GY$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$

$g : X \to GY \rightsquigarrow \tilde{g} : FX \xrightarrow{Fg} FGY \xrightarrow{\varepsilon_Y} Y$ $\qquad f \mapsto \eta_X \circ GF$

$\qquad Fg \circ \varepsilon_Y \mapsfrom g$

É isomorfismo, bisogna dimostrare la naturalità.

(·)es. $$\begin{tikzcd}\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"]\end{tikzcd}$$ Sia $\mathcal{C}_\eta$ la sottocategoria piena generata dagli X t.c. η_X è isomorfismo. e analog $\mathcal{D}_\varepsilon$.

$\Rightarrow F \dashv G$ induce un'equivalenza fra $\mathcal{C}_\eta$ e $\mathcal{D}_\varepsilon$

Prop Se $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sono aggiunti sx a $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C} \Rightarrow F \simeq F'$

Inoltre c'è un unico iso naturale $\alpha : F \overset{\sim}{\Rightarrow} F'$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id} \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\eta'"'] & GF \arrow[d, Rightarrow, "G\alpha", "\circlearrowleft"'] & , & FG \arrow[r, Rightarrow, "\varepsilon"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha G"', "\circlearrowleft"] & \mathrm{Id} \\
& GF' & & F'G \arrow[ur, Rightarrow, "\varepsilon'"'] &
\end{tikzcd}$$

Teo Gli aggiunti dx preservano i limiti 11/15

Dim: $$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[r, Rightarrow, "(*)"] & \mathcal{C}^I \arrow[r, bend left, "F_*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D}^I \arrow[l, bend left, "G_*"] \end{tikzcd}$$ allora:

$X \in \mathcal{C}$, $K : I \to \mathcal{D}$ $\to$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\Delta X, GK) \overset{(\circ)}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^I}(F\Delta X, K) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^I}(\Delta FX, K)$

$\simeq \mathrm{Coni}(FX, K) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, \lim K)$

$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G\lim K)$

$\Rightarrow G(\lim K) \Rightarrow GK$ cono limite in $\mathcal{C}$

Dimostriamo $(*)$: $K \in \mathcal{C}^I$, $K' \in \mathcal{D}^I$ vogliamo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^I}(FK, K') \overset{\text{naturale}}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}(K, GK')$

- presa $\alpha : FK \Rightarrow K'$ e $\alpha_i : FK_i \to K'_i$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{\alpha}_i : K_i \to GK'_i$

  Sia allora $\tilde{\alpha} : K \Rightarrow GK'$ definito dagli $\tilde{\alpha}_i$ $\to$ è naturale per il lemma sui $\square$ che $\circlearrowleft$

  $\Rightarrow \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ e l'inversa analog.

  Bisogna mostrare che è naturale.

- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}(K, H) \subseteq \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K_i, H_i)$

  α è nat da $K \Rightarrow H$ se e solo se $\forall \varphi : i \to j$

$$\begin{tikzcd} K_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & K_j \arrow[d, "\alpha_j"] \\ H_i \arrow[r] & H_j \end{tikzcd}$$

α^{ψ}

$\Rightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K_i, H_i) \rightrightarrows \prod_{\varphi \in \mathrm{Mor}\, I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K_{s(\varphi)}, H_{t(\varphi)})$

ha come equalizzatore proprio $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}(K, H)$

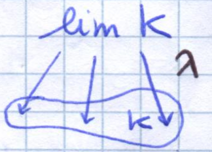
$\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}(K, GK') \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\,(\circ)"] & \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K_i, GK'_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \prod_{\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K_{s(\varphi)}, GK'_{t(\varphi)}) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^I}(FK, K') \arrow[r] & \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FK_i, K'_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FK_{s(\varphi)}, K'_{t(\varphi)}) \end{tikzcd}$$

(·) Costruire unità / counità : (·) $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}^I} \Rightarrow G_* F_*$, $F_* G_* \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}^I}$ } e dimostrare che definisco un'aggiunzione

(·) $K \in \mathcal{C}^I$: voglio $K \Rightarrow GFK$ e

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "K"'] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "GF"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

<u>Dim (2)</u>: $K : I \to \mathcal{C}$: $\lim K$ cono limite, allora:



voglio $G\lim K \Rightarrow GK$ sia ancora un cono limite, ovvero

Sia $X \overset{\mu}{\Rightarrow} GK$ un altro cono : per aggiunzione $FX \overset{\tilde{\mu}}{\Rightarrow} K$ cono in $\mathcal{D}$ e quindi trovo un'unica mappa $\Psi : FX \to \lim K$ che lo fattorizza via λ

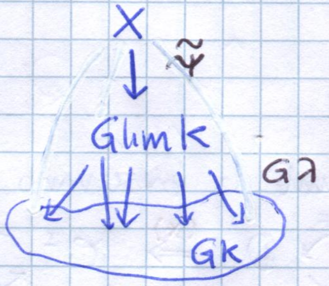
per aggiunzione trovo:

$\tilde{\Psi} : X \to G\lim K$: devo dimostrare

che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{\Psi}"] \arrow[dr, "\mu_i"'] & G\lim K \arrow[d, "G\lambda_i"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & GK_i \end{tikzcd}$$

commuta



Ma ora

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{\Psi}"] \arrow[d, equal] & G\lim K \arrow[d, "G\lambda_i"] \\ X \arrow[r, "\mu_i"'] & GK_i \end{tikzcd}$$

commuta $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \lim K \arrow[d, "\lambda_i"] \\ FX \arrow[r, "\tilde{\mu}_i"'] & K_i \end{tikzcd}$$

che commuta per costruzione di Ψ

Bisogna solo mostrare l'unicità (·)

Dualmente

<u>Teo</u> Gli aggiunti sx preservano i colimiti

ex: • $\mathrm{Vect}_k \xrightarrow{U} \mathrm{Set}$: manda $\{0\}_k$ oggetto iniziale in Vect_k, in $\{0\}$ che <u>non</u> è l'oggetto iniziale in Set

$\Rightarrow$ U <u>non</u> preserva i colimiti → NON PUÒ ESSERE AGGIUNTO SX ≡ non ammette aggiunto dx

(·) • $X \in \mathrm{Set}$: $\begin{array}{ccc} \mathrm{Set} & \to & \mathrm{Set} \\ Y & & X \times Y \end{array}$: <u>non</u> preserva i limiti $\Rightarrow$ non ha aggiunto sx.

(ma ha aggiunto dx)

(·) es: Dimostrare che i limiti commutano con i limiti, cioè:

$F : I \times J \to \mathcal{C}$: se $\lim_{i \in I} \lim_{j \in J} F(i,j)$, $\lim_{j \in J} \lim_{i \in I} F(i,j)$ esistono,

allora sono isomorfi e sono entrambi limiti per F

$(I \times J \to \mathcal{C} \leftrightsquigarrow I \to \mathcal{C}^J)$

ex: $I = \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$
$J = \bullet \rightrightarrows \bullet$ $\Rightarrow$ $I \times J =$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \bullet \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \bullet \arrow[l] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd}$$

es: In generale, colimiti e limiti NON commutano! Ma: se esistono, esiste sempre

$$\operatorname{colim}_I \lim_J F \longrightarrow \lim_J \operatorname{colim}_I F \quad (\circ)$$

ex: $X, Y \in Set$, $(\mathbb{R}, \leq)$ come categoria: $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ funzione

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x,y) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y)$$

ex: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$, $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$, $\liminf x_n = \sup_{m>0} \inf_{n \geq m} x_n$

$\limsup x_n = \inf_{m>0} \sup_{n \geq n} x_n$

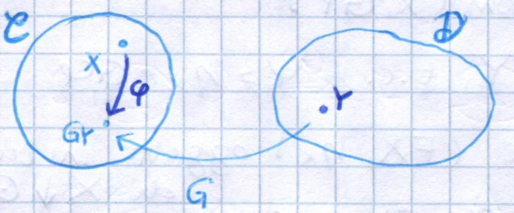
$\Rightarrow \liminf x_n \leq \limsup x_n$

Dato $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ preserva i limiti $\Rightarrow$ è vero che ha un aggiunto ~~d~~sx?

Se esiste un aggiunto sx F deve essere t.c. $Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(X, GY)$

cioè FX deve essere una rappresentazione di $Hom_{\mathcal{C}}(X, G\cdot)$

Considero la categoria $X \downarrow G$: oggetti: coppie del (Y, φ), $Y \in \mathcal{D}$, $\varphi \in Hom(X, GY)$



morfismi: $(Y, \varphi) \to (Y', \varphi')$ tali che

$g : Y \to Y'$ con
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ GY \arrow[rr, "Gg"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] & & GY' \end{tikzcd}$$

Claim: una rappresentazione di $Hom(X, G\cdot)$ definisce un oggetto iniziale in $X \downarrow G$

Infatti: $Hom_{\mathcal{C}}(X, GY) \simeq Hom_{\mathcal{D}}(\boxed{FX}, Y)$ $\forall Y \Rightarrow FX \in \mathcal{D}$

$\eta_X : X \to GFX \Leftrightarrow id_{FX}$

Dico che (FX, η_X) è oggetto iniziale di $X \downarrow G$ "slice category"

$\forall (Y, \varphi) \in X \downarrow G : (FX, \eta_X) \to (Y, \varphi)$ è

$g : FX \to Y$ t.c.

$\overset{\wedge}{Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)}$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ GFX \arrow[rr, "Gg"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] & & GY \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ GFX \arrow[r] & GY \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} FX \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & FX \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ FX \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\Leftrightarrow g = \tilde{\varphi}$ ✓

Lemma: G ha un aggiunto sinistro se e solo se $\forall X \in \mathcal{C}$, $X \downarrow G$ ha un oggetto iniziale

Dim: ($\Rightarrow$) già fatto

($\Leftarrow$) Costruisco $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$: $\forall X \in \mathcal{C}$, FX è l'oggetto iniziale di $X \downarrow G$

Data $X \xrightarrow{f} X'$: Ff?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & X' \arrow[d, "\eta_{X'}"] \\ GFX \arrow[r, "GFf"'] & GFX' \end{tikzcd}$$

osservo che $(FX', \eta_{X'} \circ f) \in X \downarrow G$ $\Rightarrow \exists! \, Ff : FX \to FX'$ tale che

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[dr, "\eta_{X'} \circ f"] & \\ GFX \arrow[rr, "GFf"'] & & GFX' \end{tikzcd}$$

In effetti F è un funtore:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_{X'}"'] & X'' \arrow[d, "\eta_{X''}"'] \\ GFX \arrow[r, "GFf"'] \arrow[rr, bend right, "G(f\circ g)"'] & GFX' \arrow[r, "GF_g"'] & GFX'' \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\eta: Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$.

Resta da verificare che F è l'aggiunto sx di G (∘)

Def: diciamo che un funtore che preserva i (co) limiti è (co)continuo 11/20

Sia $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ continuo $\Rightarrow$ è un aggiunto destro?

Del lemma 5 ci manca solo (∘): ovvero abbiamo $Id_{\mathcal{C}} \overset{\eta}{\Rightarrow} GF$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$
$$\varphi \quad \mapsto \quad X \xrightarrow{\eta_X} GFX \xrightarrow{G\varphi} GY$$

$\Rightarrow$ abbiamo definito $\mathrm{Hom}(FX, Y) \to \mathrm{Hom}(X, GY)$

surgettività: $X \xrightarrow{\psi} GY \Rightarrow \exists\, \varphi: FX \to Y$ t.c. $\psi = \eta_X \circ G\varphi$

(e iniettività)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\eta_X"'] & GY \\ GFX \arrow[ur, "G\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

poichè (FX, η_X) oggetto iniziale di $X \downarrow G$

$\Rightarrow \exists!\, \varphi: FX \to Y$ t.c. $\psi = \eta_X \circ G\varphi$

Teo: $\mathcal{E}$ categoria completa e localmente piccola. Allora

$\mathcal{E}$ ha un oggetto iniziale $\iff$ (*) $\left(\exists \text{ un insieme piccolo } \{X_i\}_I \text{ di oggetti di } \mathcal{E} \text{ tali che: } \forall X \in \mathcal{E}\ \exists\, i \text{ con } \mathrm{Hom}(X_i, X) \neq \emptyset \right)$

Oss: se $|I| = 1$: $(*) \leftrightarrow X_1$ è "deb. iniziale"

In generale $(*) \leftrightarrow \{X_i\}_{i \in I}$ sono unitamente debolmente iniziali

Dim: ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{E}$ ha un oggetto iniziale $\Rightarrow X_1 = A$ ✓

($\Leftarrow$) $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}$ è la sottocategoria piena generata dagli X_i:

$\mathcal{J}$ è piccola $\Rightarrow \mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{E}$ ha un limite ($\mathcal{E}$ completa)

Sia allora $L \overset{\lambda}{\Rightarrow} \mathcal{J}$ cono limite

1. L è debolmente iniziale: $\forall X \in \mathcal{E}\ \exists\, i, \varphi: \varphi \in \mathrm{Hom}(X_i, X)$
$\rightarrow \underset{\mu_X}{\overset{}{=}}\ \varphi \circ \lambda_i \in \mathrm{Hom}(L, X)$

in realtà scelgo meglio μ_X:

- se $X = X_i \rightarrow \mu_X = \lambda_i$
- se $X \neq X_i \rightarrow \mu_X = \quad \circ \lambda_i$ come sopra, $f^X \in \mathrm{Hom}(X_i, X)$

Trovo $\{\mu_X\}_{X \in \mathcal{E}}$ mappe da $L \to \mathcal{E}$

2. $L \overset{\mu}{\Rightarrow} Id_{\mathcal{E}}$ è un cono e $\mu_L = id_L$

3. Se vale 2 $\Rightarrow$ L è iniziale :

$\forall X \in \mathcal{E}\ \exists\ \mu_X : L \to X$, se avessi $f : L \to X$ morfismo in $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\mu_L"'] \arrow[dr, "\mu_X"] & \\ L \arrow[rr, "f"'] & \circlearrowleft & X \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \mu_X = \mu_L \circ f = f \longrightarrow \mu_X$ unico morfismo $L \to X$

Dimostriamo 2 :

Sia $f : X \to X'$ in $\mathcal{E}$, allora

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "\lambda_k"] \arrow[rrrdd, bend left, "\lambda_j"] \arrow[rddd, bend right, "\lambda_i"'] & & & \\ X_k \arrow[rd] \arrow[rrrd, bend left] \arrow[rdd, bend right] & & & \\ & Z \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & X_j \arrow[d, "f_{X'}"] \\ & X_i \arrow[r, "f_X"'] & X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

dove :

- Z è il pullback, quindi ho le commutatività $\circlearrowleft$
- L cono sopra $\mathcal{J}$ $\Rightarrow$ ho le commutatività $\circlearrowleft$

} $\mu : L \Rightarrow Id_{\mathcal{E}}$ è un cono

Guardo μ_L : $L \overset{\mu}{\Rightarrow} I_{\mathcal{E}}$ cono :

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\mu_L"'] \arrow[dr, "\mu_X"] & \\ L \arrow[rr, "\mu_X"'] & \circlearrowleft & X \end{tikzcd}$$

$\forall X$

$\Rightarrow \forall i$

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\mu_L"'] \arrow[dr, "\lambda_i"] & \\ L \arrow[rr, "\lambda_i"'] & & X_i \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \mu_L$ induce una mappa di coni su $\mathcal{J}$
$(L, \lambda) \mapsto (L, \lambda)$

Ma ora L cono limite su $\mathcal{J}$: $Hom(L, L) \simeq Coni(L, \mathcal{J})$
$id_L \longmapsto \lambda$

Torniamo a guardare $X \downarrow G$:

- D localmente piccola $\Rightarrow$ $X \downarrow G$ loc piccola $\forall X$
- $X \downarrow G$ è completa?

Consideriamo il funtore dimenticante $U : X \downarrow G \to D$

(∘) lemma U crea tutti i limiti che esistono in D e che sono preservati da G

Idea: $I \xrightarrow{K} X \downarrow G \leftrightsquigarrow I \xrightarrow{UK} D$ con un cono di vertice X sopra GUK

$L \overset{\lambda}{\Rightarrow} UK$ cono limite $\Rightarrow$ $GL \overset{G\lambda}{\Rightarrow} GUK$ cono limite

quindi $\exists!\ X \xrightarrow{\varphi} GL$ fattorizzazione $X \Rightarrow GUK$ tramite $G\lambda$

$\Rightarrow (L, \varphi)$ limite di K in $X \downarrow G$

TEO ("General Adjoint Functor Theorem")

Sia $\mathcal{D}$ una categoria completa e localmente piccola, allora

$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ha un aggiunto sinistro $\iff$ $\underline{1}$ G continuo
$\underline{2}$ $\forall X \in \mathcal{C}$, esiste un insieme piccolo $\{f_i : X \to$
unitamente debolmente iniziali

Dim: G ha un aggiunto sx $\iff$ $\forall X \in \mathcal{C}$, $X \downarrow G$ ha un oggetto iniziale

- Ma $(1) \Rightarrow X \downarrow G$ è completa ($\mathcal{D}$ completa + G continuo)
e localmente piccola

Quindi se vale $(2) \Rightarrow X \downarrow G$ ha un oggetto iniziale

- D'altra parte se G è aggiunto destro $\Rightarrow$ vale $(1) \Rightarrow X \downarrow G$ completa, loc. piccola
$\Rightarrow$ inoltre $X \downarrow G$ ha oggetto iniziale $\Rightarrow$ vale (2)

Oss: (2) è chiamata "solution set condition"

ex: - $U : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ ha un aggiunto sinistro

- In generale ogni funtore dimenticante "algebrico" ha un aggiunto sx
- $U : \mathrm{Lie} \to \mathrm{Set}$ ha un aggiunto sx

Esiste una versione leggermente diversa Special Adjoint Functor Theorem

- Comp Haus $\to$ Top ha un aggiunto sinistro, che si chiama "compattificazione di Stone-Cech"
- K cardinale regolare : $\rightsquigarrow$ categorie localmente K-presentabili

Teo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fra categorie loc K-presentabili :

1) F ha aggiunto dx $\iff$ F è cocontinuo
2) F ha aggiunto sx $\iff$ F è continuo e preserva i colimiti filtrati

Ps Id Pr Ai Xd DC Lr Ru Ae I

⑤ MONADI

11/22

Guardo Free ⊣ Dimenticante :

ex: $$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Alg \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$ ↑ qualche tipo di struttura algebrica

→ ho: $UF : Set \to Set$ e $\eta : Id \Rightarrow UF$, $\varepsilon : FU \Rightarrow Id$

Ottengo: $UFUF \xRightarrow{U\varepsilon F} UF$

Def: $\mathcal{C}$ categoria, una monade in $\mathcal{C}$ è un funtore $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ con trasformazioni naturali: $\eta : Id \Rightarrow T$, $\mu : T^2 \Rightarrow T$ tali che

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & T & \end{tikzcd}$$

commutano

Ovvero: una monade è un monoide in $(Fun(\mathcal{C},\mathcal{C}), \circ, Id_{\mathcal{C}})$

"Categoria monoidale" $(\mathcal{V}, \otimes, 1_{\mathcal{V}})$ dove $\otimes$, $1_{\mathcal{V}}$ soddisfano certe proprietà

Lemma: $$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$ aggiunzione $\Rightarrow$ GF è una monade in $\mathcal{C}$ con η e $G\varepsilon F$

Dim: Vogliamo la commutatività dei diagrammi:

(1) $$\begin{tikzcd} GFGFGF \arrow[r, "GFG\varepsilon F"] \arrow[d, "G\varepsilon FGF"'] & GFGF \arrow[d, "G\varepsilon F"] \\ GFGF \arrow[r, "G\varepsilon F"'] & GF \end{tikzcd}$$ commuta $\Leftrightarrow$ $$\begin{tikzcd} FGFGF \arrow[r, "FG\varepsilon F"] \arrow[d, "\varepsilon FGF"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ FGF \arrow[r, "\varepsilon F"'] & F \end{tikzcd}$$ (1b)

Ma ora $$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "FG"{name=A}] \arrow[r, bend right=50, "Id"'{name=B}] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "FG"{name=C}] \arrow[r, bend right=50, "Id"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\varepsilon"] \arrow[Rightarrow, from=C, to=D, "\varepsilon"] \end{tikzcd}$$: ho $FGFGF \xRightarrow{\varepsilon\varepsilon F} F$ che si spezza come

$FGFGF \xRightarrow{FG\varepsilon F} FGF \xRightarrow{\varepsilon F} F$

$FGFGF \xRightarrow{\varepsilon FGF} FGF \xRightarrow{\varepsilon F} F$

quindi (1b) commuta ⇒ (1) commuta

(2) $$\begin{tikzcd} GF \arrow[r, "\eta GF"] \arrow[dr, equal] & GFGF \arrow[d, "\mu"] & GF \arrow[l, "GF\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & GF & \end{tikzcd}$$ $\Leftrightarrow$ $$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, equal] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\circlearrowright"] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGF \arrow[d, "\varepsilon F"'] & F \arrow[l, "F\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ F & \end{tikzcd}$$

che commutano per le prop di ε, η

Data ~~dtt~~ una aggiunzione costruisco in maniera naturale sul dominio dell'aggiunto <u>sinistro</u>, una monade

Su $\mathcal{D}$ invece non induce una monade: $FG : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ ma non ho una unità (solo counità)

→ esistono strutture di comonadi – con counità ε

ex: • P : Set $\to$ Set insieme delle parti : sia $X \in$ Set : $\eta_X : X \to P(X)$, $x \mapsto \{x\}$

Inoltre ha $\mu_X : P(P(X)) \to P(X)$ UNIONE.

(∘) es: Verificare che η, μ sono trasformazioni naturali che inducono su P una struttura di monade

• $(P, \leq)$: T monade su P è una funzione monotona : $T : P \to P$ ⊏ T preserva ≤

tale che $x \leq Tx \quad \forall x \in P$ unità
$T^2x \leq Tx \quad \forall x \in P$ moltipl.

$\Rightarrow Tx \leq T^2x \leq Tx \Rightarrow T^2x = Tx$: operatore di chiusura

ex: P = sottoinsieme di uno spazio topologico
T = chiusura

• Mis = categoria degli spazi misurabili, T : Mis $\to$ Mis, $A \mapsto$ Prob(A) è una monade

Def: T monade in $\mathcal{C}$. Una T-algebra è una coppia (X, a) con $X \in \mathcal{C}$, $a : TX \to X$ tale che:

$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "Ta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & TX \arrow[d, "a"] \\ TX \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd} \quad e \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, equal] & TX \arrow[d, "a"] \\ & X \end{tikzcd}$$

commutano

Def: Un morfismo di T-algebre $(X, a) \to (X', a')$ è $f : X \to X'$ t.c.

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & TX' \arrow[d, "a'"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

commuta

Fatto: Le T-algebre formano una categoria, indicata con $\mathcal{C}^T$

ex: • $\begin{tikzcd} \text{Vect}_{\mathbb{R}} \arrow[r, bend left, "\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \text{Vect}_{\mathbb{C}} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$: un'algebra per la monade associata è (V, a) con V $\mathbb{R}$-sp. vett, $a : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to V$ cioè

$V \times \mathbb{C} \longrightarrow V$ bilineare ($\mathbb{C} \curvearrowright V$: V è un $\mathbb{C}$-sp. vett)

$\Rightarrow$ Le algebre sono $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$

• $(P, \leq)$: T monade su P allora una T-algebra è $x \in P$ t.c. $Tx = x$

ex: P = sottoinsiemi di uno sp. topologico, T = chiusura
$\Rightarrow$ T-algebre sono i chiusi

Prop: (T, η, μ) monade in $\mathcal{C}$: allora $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F^T"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^T \arrow[l, bend left, "G^T"] \end{tikzcd}$ aggiunzione la cui MONADE è proprio T

Dim: G^T := dimenticante ovvio

$F^T(X) = (TX, T^2X \xrightarrow{\mu_X} TX) \quad \forall X \in \mathcal{C}$
$F^T(f) = Tf \quad \forall f : X \to X'$

e si verifica che è un funtore (e che $Tf \in \text{Mor}(\mathcal{C}^T)$)

Mostriamo che $\mathcal{C} \underset{G^T}{\overset{F^T}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}^T$ è in effetti un'aggiunzione:

UNITÁ: $\forall X \in \mathcal{C}$ voglio $X \to G^T F^T X = TX$ quindi l'unità dell'aggiunzione è η

COUNITÁ: $\forall (X,a) \in \mathcal{C}$ voglio $\underset{\underset{(TX,\, \mu_X)}{\parallel}}{F^T G^T (X,a)} \longrightarrow (X,a)$ e prendo $a: TX \to X$

ed in effetti:
$$\begin{tikzcd}
T^2X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\circlearrowright"] & TX \arrow[d, "a"] \\
TX \arrow[r, "a"'] & X
\end{tikzcd}$$
perché (X,a) algebra

Si verifica che $\{\varepsilon_{(X,a)}\}$ definiscono $\varepsilon: F^T G^T \Rightarrow Id_{\mathcal{C}^T}$

Inoltre: η, ε sono in effetti unità e counità

Infine T è proprio la monade indotta:
- $G^T F^T (X) = TX \quad \forall X$
- η è l'unità
- $\mu = G^T \varepsilon F^T$ (◦)

(◦) $(G^T \varepsilon F^T)_X = G^T \varepsilon_{(F^T X)} = G^T \varepsilon_{(TX, \mu_X)} = \mu_X$

Data una monade, ci sono più aggiunzioni associate la cui monade è T. 11/29

Oss:
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[rr, bend left=50, "F"] & D \arrow[l, bend left, "G"] & D' \arrow[ll, bend left=50, "G|_{D'}"]
\end{tikzcd}$$
$D \supset D' = \text{span}\{FX : X \in \mathcal{C}\}$ inducono la stessa monade.

Def: (T, η, μ) monade in $\mathcal{C}$: la categoria $\mathcal{C}_T$ di Kleisli è definita da:

$Ob(\mathcal{C}_T) = Ob(\mathcal{C})$, $X, Y \in \mathcal{C}^T$: $Hom_{\mathcal{C}^T}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, TY)$

$id: X \to X$ in $\mathcal{C}^T \leftrightarrow X \xrightarrow{\eta_X} TX$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & Y \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$
in $\mathcal{C}^T \leftrightarrow$ $X \to TY$, $Y \to TZ$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[rrr, bend right] & TY \arrow[r] & T^2Z \arrow[r, "\mu_Z"] & TZ
\end{tikzcd}$$
✓

(◦) es: dimostrare che $\mathcal{C}_T$ è una categoria

Prop: (T, η, μ) monade in $\mathcal{C} \Rightarrow$
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_T"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}_T \arrow[l, bend left, "G_T"]
\end{tikzcd}$$
la cui monade indotta è T.

Dim: $X \in \mathcal{C}$: $F_T(X) = X$, $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$: $F_T(f) \leftrightarrow$
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[rd, "f"'] & TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & TY \\
& Y \arrow[ru, "\eta_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

(◦) verificare che F_T è un funtore

$X \in \mathcal{C}^T$: $G_T(X) = TX$, $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}_T$: $G_T(f): TX \to TY$ in $\mathcal{C}$
$\updownarrow$

(◦) G_T è un funtore $\quad X \xrightarrow{\tilde{f}} TY$ in $\mathcal{C} \Rightarrow TX \xrightarrow{T\tilde{f}} T^2Y \xrightarrow{\mu_Y} TY := G_T(f)$

Per come li abbiamo definiti: $\forall X \in \mathcal{C}$: $G_T F_T X = TX$

$X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$: $F_T(f)$ in $\mathcal{C}_T \leftrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\eta_Y} TY \Rightarrow G_T F_T(f) = TX \xrightarrow{T(\eta_Y \circ f)} T^2Y \xrightarrow{\mu_Y} TY$

$= \underbrace{\mu_Y \circ T\eta_Y}_{id} \circ Tf = Tf$

Dobbiamo verificare che abbiamo costruito una aggiunzione.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}(F_T X, Y) \overset{?}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G_T Y)$ che per def di F_T e G_T è

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, TY) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}(X, Y) \overset{?}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, TY) \rightarrow$ ok (•) è naturale

(•) Per concludere bisogna solo verificare che l'unità e la moltiplicazione di $G_T F_T$ sono veramente η e μ.

(T, η, μ) monade in $\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{Agg}_T$ = categoria delle aggiunzioni che inducono la monade (T, η, μ).

cioè $\mathrm{Ob}(\mathrm{Agg}\, T) = \left\{ \mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D} \text{ la cui monade è } (T, \eta, \mu) \right\}$

e date

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, bend left, "G"] & & \mathcal{D}' \arrow[dl, bend left, "G'"] \\
& \mathcal{C} \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend left, "F'"] &
\end{tikzcd}$$

oggetti di Agg_T : un morfismo è una mappa $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ tale che

$$\Phi F = F'$$
$$G'\Phi = G$$

È una categoria

Oss: $\mathcal{C}_T$ e $\mathcal{C}^T$ "sono" in Agg_T

Prop: $\mathcal{C}_T$ è iniziale in Agg_T, $\mathcal{C}^T$ è finale in Agg_T.

Quindi ogni $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ con monade (T, η, μ) : $\exists!\ \mathcal{C}_T \to \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$

Dim(Prop): • Sia $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ in Agg_T, allora voglio $(F_T, G_T) \longrightarrow (F, G)$ in Agg_T

cioè:

$\mathcal{C}_T \xrightarrow{K} \mathcal{D}$ t.c. $KF_T = F$
$GK = G_T$

Necessariamente: $\forall X \in \mathcal{C}$: $FX = KF_T X = KX$: $\forall X \in \mathcal{C}^T$ $KX := FX$

Sia $f : X \to X'$ in $\mathcal{C}_T$ voglio $Kf : \underset{FX}{\overset{\shortparallel}{KX}} \to \underset{FX'}{\overset{\shortparallel}{KX'}}$ in $\mathcal{D}$

$\updownarrow$ def di $\mathcal{C}_T$

$X \xrightarrow{\tilde{f}} TX'$ in $\mathcal{C}$
$\shortparallel$
GFX'

$\leftrightarrow$ aggiunt. $FX \xrightarrow{Kf} FX'$ in $\mathcal{D}$

(•) Dimostrare che K è un funtore

Inoltre $\forall f : X \to X'$ in $\mathcal{C}^T$: $GKf = G_T f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, TY)$

$$\begin{tikzcd}
f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}(F_T X, X') \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "K"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G_T X') \arrow[d, equal] \\
Kf \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(KF_T X, KX') \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GKX') \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, KX') \arrow[ur, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

lo trovo $\circlearrowright$

(a) il diagramma commuta

(b) Kf è unico

(a) vediamo perché commuta: $F_T X \xrightarrow{\varphi} X' \overset{\eta \text{ unità di } G_TF_T}{\longmapsto} X \xrightarrow{\tilde{\varphi}} G_T X'$

$$K \big\downarrow$$

$$\begin{array}{l} K\varphi : KF_T X \longrightarrow K' \\ \qquad\qquad \shortparallel \\ K\varphi : FX \longrightarrow KX' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ \tilde{\varphi}\left(X \xrightarrow{\eta_X} G_T F_T X \xrightarrow{G_T\varphi} G_T X' \right) \\ \shortparallel \\ \tilde{\varphi}\left(X \xrightarrow{\eta_X} GK\underbrace{F_T}_{F} X \xrightarrow{GK\varphi} GKX' \right) \\ \shortparallel \\ \eta \text{ unità di } GF \quad \tilde{\varphi}\left(X \xrightarrow{\eta_X} TX \xrightarrow{GK\varphi} GKX' \right) \\ \shortparallel \\ (\widetilde{K\varphi}) \end{array}$$

12/06

- T monade, $(T^2X, T\mu) \overset{Ta}{\underset{\mu_X}{\rightrightarrows}} (TX, \mu_X) \xrightarrow{a} (X, a)$ coequalizzatore in $\mathcal{C}^T$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[l, bend left, "t"] & Z \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$ coequalizzatore split se $hs = \mathrm{id}_Z$, $gt = \mathrm{id}_Y$, $ft = sh$ e $hf = hg$

$\Rightarrow$ un esempio in $\mathcal{C}$ è
$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, shift left, "Ta"] \arrow[r, shift right, "\mu_X"'] & TX \arrow[r, "a"] \arrow[l, bend left, "\eta_{TX}"] & X \arrow[l, bend left, "\eta_X"] \end{tikzcd}$$
è un coequalizzatore split se (X, a) algebra su T

Infatti: per def di algebra su T: $\begin{cases} aTa = a\mu_{TX} \\ a\eta_X = \mathrm{id}_X \end{cases}$ $\quad \mu_{TX}\eta_{TX} = \mathrm{id}_Y$

e $Ta\,\eta_{TX} = \eta_X a$ perché η nat:
$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "\eta_{TX}"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T^2X \arrow[d, "Ta"] \\ X \arrow[r, "\eta_X"'] & TX \end{tikzcd}$$

<u>lemma</u>: $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[l, bend left, "t"] & Z \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$ coeq. split $\Rightarrow$ $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$ è un coequalizz.

<u>Dim</u>:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & Z \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[dl, "ks"] \arrow[dl, bend left=60, "\varphi"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

$\forall\ (k, W)$ cono sotto $X \rightrightarrows Y$ trovo $Z \xrightarrow{ks} W$ che fa commutare.

Dimostro che è unica: sia $\varphi: Z \to W$ t.c.

$$k = ksh = \varphi h \Rightarrow ks = \varphi \underbrace{hs}_{\mathrm{id}_Z} = \varphi.$$

<u>Def</u>: $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtore:

- un coequalizzatore G-split è una coppia di morfismi $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ in $\mathcal{D}$ con una estensione di $GX \rightrightarrows GY$ a un coeq. split

$\exists\ Z \in \mathcal{C}$ t.c.
$$\begin{tikzcd} GZ \arrow[r, shift left, "Gf"] \arrow[r, shift right, "Gg"'] & GY \arrow[r, "h"] \arrow[l, bend left=60, "t"] & Z \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

- diciamo che G crea strettamente coequalizzatori di coppie G-split se ogni COEQ. G-SPLIT ammette un unico sollev. a un COEQ IN $\mathcal{D}$

<u>Prop</u>: (T, η, μ) monade in $\mathcal{C}$ allora $G^T: \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ crea strettamente coequalizzatori di coppie G-split

(<u>Oss</u>: G^T è monadico.)

<u>Dim</u>: $(X, a) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} (Y, b)$ in $\mathcal{C}^T$ con
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[l, bend left, "t"] & Z \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$ coeq. split in $\mathcal{C}$

I coeq. split sono preservati da OGNI FUN

In particolare h coequalizzatore di $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$

$\Rightarrow$ $$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, shift left, "Tf"] \arrow[r, shift right, "Tg"'] & TY \arrow[r, "Th"] \arrow[l, bend left, "Tt"] & TZ \arrow[l, bend left, "Ts"] \end{tikzcd}$$ è ancora un coequalizzatore split

quindi TZ coequalizz di $TX \rightrightarrows TY$

Allora:

$$\begin{tikzcd}
TX \arrow[r, shift left, "Tf"] \arrow[r, shift right, "Tg"'] \arrow[d, "a"'] & TY \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "b"'] \arrow[rd, phantom, "\circlearrowright"] & TZ \arrow[d, "c"] \\
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] & Z
\end{tikzcd}$$

$\exists!\, c$ che fa commutare il diagramma

a, b definiscono un cono sotto $TX \rightrightarrows TY$ con vertice $Z \Rightarrow \exists\, TZ \to Z$

(questo mi dice anche che c è l'unica struttura di alg. su Z che rende ~~la un morfismo di algebre~~ $(X,a) \rightrightarrows (Y,b) \to (Z,c)$ un cono in $\mathcal{C}^T$).

- Verifichiamo che (Z,c) è algebra

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\eta_Z"] \arrow[rd, equal] & TZ \arrow[d, "c"] \arrow[ld, phantom, "\circlearrowright"] \\
& Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^2 Z \arrow[r, "Tc"] \arrow[d, "\mu_Z"'] \arrow[rd, phantom, "\circlearrowright"] & TZ \arrow[d, "c"] \\
TZ \arrow[r, "c"] & Z
\end{tikzcd}$$

dimostrare la commutatività di

Ora:

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[ld, "h"'] \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[rdd, equal] & TY \arrow[ld, "Th"'] \arrow[dd, "b"] \\
Z \arrow[r, "\eta_Z"] \arrow[rdd, equal] & TZ \arrow[dd, "c"] \arrow[ldd, phantom, "\circlearrowright"] & \\
& & Y \arrow[ld, "h"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

- la faccia sopra commuta, η trasf. nat.
- la faccia dietro commuta, (Y,b) alg.
- la faccia a dx commuta per def di c

$\Rightarrow \quad c\eta_Z h = cTh\eta_Y = hb\eta_Y = h$ e h ha una sezione s

$\Rightarrow \quad c\eta_Z hs = hs \to c\eta_Z = id$

- Verificare che $(X,a) \rightrightarrows (Y,b) \to (Z,c)$ coequalizzatore (es)

<u>Cor</u>: $(T^2X, \mu_X) \overset{Ta}{\underset{\mu_X}{\rightrightarrows}} (TX, \mu_X) \xrightarrow{a} (X,a)$ è un coequalizzatore

<u>Cor</u>: $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ ($\perp$) monadica $\Rightarrow$ G crea coeq. di coppie G-split

<u>Dim</u>:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "H"] \arrow[rd, bend left, "G^{\sim}"] & & \mathcal{C}^T \arrow[ll, bend right, "L"'] \arrow[ld, bend left, "G^T"] \\
& \mathcal{C} \arrow[lu, bend left, "F"] \arrow[ru, bend left, "F^T"] \arrow[lu, phantom, "\perp"] &
\end{tikzcd}$$

: $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y'$ coeq. G-split in $\mathcal{D}$

cioè

$$\begin{tikzcd}
GY \arrow[r, shift left, "Gf"] \arrow[r, shift right, "Gg"'] & GY' \arrow[l, bend left=60, "t"] \arrow[r, "h"] & Z \arrow[l, bend left=60, "s"]
\end{tikzcd}$$

coeq. split in $\mathcal{C}$ (*)

e $HY \overset{Hf}{\underset{Hg}{\rightrightarrows}} HY'$ è G^T-split ($G^T H = G$)

$\underset{\text{Prop.}}{\Rightarrow}$ sollevo (*) in $\mathcal{C}^T$ e trovo $HY \overset{Hf}{\underset{Hg}{\rightrightarrows}} HY' \longrightarrow \tilde{Z}$ coeq in $\mathcal{C}^T$

ma allora:

$$\begin{tikzcd}
LHY \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, phantom, "\wr"] & LHY' \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & L\tilde{Z} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
Y \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Y' \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

coeq in $\mathcal{D}$

Teo (monadicità di Barr-Beck) $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ aggiunto destro monadico

$\iff$ G crea coequaliz. di coppie G-split

Dim: $(\Rightarrow)$ già visto

$(\Leftarrow)$ Abbiamo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, bend left] & & \mathcal{C}^T \arrow[ll, bend right, "L"'] \arrow[dl, bend left] \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend left, "F^T"] & \end{tikzcd}$$

: vogliamo costruire L

- $(X,a) \in \mathcal{C}^T$: $(T^2X, \mu_{TX}) \overset{Ta}{\underset{\mu_X}{\rightrightarrows}} (TX, \mu_X) \xrightarrow{a} (X,a)$ coeq in $\mathcal{C}^T$
- $L(TX, \mu_X) = L(F^T(X)) \rightsquigarrow L(X,a)$ deve essere il coeq di $L(T^2X, \mu_X) \rightrightarrows L(TX, \mu_X)$

Ma ora $F^T = HF \to LH \simeq id_{\mathcal{D}}$

necessariam. $L(TX, \mu_X) \simeq FX$ $(LHFX \simeq FX)$

scelgo $L(TX,\mu_X) = FX$

Ho: $(\circ)$ $FGFX \overset{Fa}{\underset{\varepsilon_{FX}}{\rightrightarrows}} FX \xrightarrow{\theta} L(X,a)$ definisco $L(X,a)$ come il coeq di questo diag

Applicando G:

$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, shift left, "Ta"] \arrow[r, shift right, "\mu_X"'] & TX \arrow[r, "a"] \arrow[l, bend left=60] & X \arrow[l, bend left=60] \end{tikzcd}$$

e poiché G crea coeq. di coppie G-split

$\to$ esiste il coequalizzatore di $(\circ)$

Bisogna verificare ~~che~~ cosa succede alle mappe e $LH \simeq id_{\mathcal{D}}$ e $HL \simeq id_{\mathcal{C}^T}$

12/11

$\varphi: (X,a) \to (X',a')$ in $\mathcal{C}^T$: voglio

$L\varphi : L(X,a) \to L(X',a')$

$$\begin{tikzcd} FGFX \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "FGF\varphi"'] & FX \arrow[r] \arrow[d, "F\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L(X,a) \arrow[d, "L\varphi"] \\ FGFX' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & FX' \arrow[r] & L(X',a') \end{tikzcd}$$

$(\exists!)$

Per concludere:
1) L funtore (es)
2) $LH \simeq id_{\mathcal{D}}$ (es)
3) $HL \simeq id_{\mathcal{C}^T}$ (manca la naturalità: es)

3) $HL \simeq id_{\mathcal{C}^T}$: Recap: $Y \in \mathcal{D}$: $HY = (GY, G\varepsilon_Y) \in \mathcal{C}^T$

$HL(X,a) = (GL(X,a), G\varepsilon_{L(X,a)}) \underset{\sigma}{\overset{?}{\simeq}} (X,a)$

$\to GL(X,a) = \text{coeq}(GFGFX \rightrightarrows GFX) \overset{\sigma}{\simeq} X$ t.c.

$$\begin{tikzcd} GFX \arrow[r, "G\theta"] \arrow[dr, "a"'] & GL(X,a) \\ & X \arrow[u, "\sigma"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} GFX \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, "G\theta"] & GFGL(X,a) \arrow[d, "G\varepsilon_{L(X,a)}"] \\ X \arrow[r, "\simeq"] & GL(X,a) \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F\sigma", "\sim"'] \arrow[dr, "\theta"'] & FGL(X,a) \arrow[d, "\varepsilon_{L(X,a)}"] \\ & L(X,a) \end{tikzcd}$$

e so che $\theta \circ Fa = \theta \circ \varepsilon_{FX} \overset{\varepsilon \text{ counità}}{=} \varepsilon_{L(X,a)} \circ FG\theta = \varepsilon_{L(X,a)} \circ F\sigma \circ Fa$ e $Fa \circ F\eta_X = id$

ex: • "tutti" i funtori dimenticanti algebrici sono monadici

- Top $\to$ Set <u>non</u> è monadico
- $P : \mathrm{Set}^{op} \to \mathrm{Set}$ t.c. $P(X)$ = parti di X è monadico

1. P agg. destro : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, P(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}^{op}}(\mathcal{L}(X), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y, \mathcal{L}(X))$

$\mathcal{L} = P$: infatti $P(X) \simeq \mathrm{Hom}(X, \{0,1\})$

e $\mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(X, \mathrm{Hom}(Y, \{0,1\})) \simeq \mathrm{Hom}(X \times Y, \{0,1\})$

"Argomenti da seminario"

- $\mathcal{C}$ categoria di "spazi" (varietà $\mathcal{C}^\infty$, spazi topologici, schemi, anelli)

$X \in \mathcal{C}$: $\mathcal{F}_X$ = categoria di oggetti "sopra" X

ex: fibrati principali, fasci, rivestimenti, moduli

$f : Y \to X \mapsto f^* : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$

Discesa: $M \in \mathcal{F}_Y$: che cosa vuol dire che $M \in \mathrm{Im}\, f^*$?

$A \to B$ anelli commutativi:

Groethendieck : categorie fibrate / proto funtori

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[d] \\ C \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}_X$ fibra in x

cioè
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathcal{F} \arrow[d] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "x"] & C \end{tikzcd}$$

- Se la fibrazione è fatta bene: $f : Y \to X \mapsto$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_X \arrow[r, bend left, "f^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{F}_Y \arrow[l, bend left, "f_*"] \end{tikzcd}$$

$\to$ monade su $\mathcal{F}_X$
comonade su $\mathcal{F}_Y$ e le algebre su $\mathcal{F}_Y$ sono esattamente $\mathcal{F}_X$

ovvero f^* comonadico.

ex:
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \\ \coprod U_i \end{tikzcd}$$
ric. aperto

⑦ ESTENSIONI DI KAN

12/13

ex: 2^n $n\in\mathbb{N}$, 2^q $q\in\mathbb{Q}$ ⇝ 2^α $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "k"'] & & \mathcal{E} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Def: dato un diagramma come a lato, un'estensione di Kan sinistra di F lungo K è una coppia $(\mathrm{Lan}_k F, \eta)$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "k"'] & {} \arrow[d, Rightarrow, "\eta"] & \mathcal{E} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_k F"'] &
\end{tikzcd}$$

e $\forall\ (G: \mathcal{D}\to\mathcal{E}, \alpha: F \Rightarrow G\circ K)$ esiste un'unica fattorizzazione

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "k"'] & {} \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] & \mathcal{E} & & \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "k"'] & {} \arrow[d, Rightarrow, "\eta"'] & \mathcal{E} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] & & = & & \mathcal{D} \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Lan}F"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha'"] &
\end{tikzcd}$$

Dualmente, un'estensione di Kan destra di F lungo K è una coppia $(\mathrm{Ran}_k F, \varepsilon)$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "k"'] & {} & \mathcal{E} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Ran}_k F"'] \arrow[u, Rightarrow, "\varepsilon"] &
\end{tikzcd}$$

e $\forall\ (G: \mathcal{D}\to\mathcal{E}, \beta: GK \Rightarrow F)$ esiste un'unica fatt.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "k"'] & {} & \mathcal{E} & & \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & {} & \mathcal{E} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] \arrow[u, Rightarrow, "\beta"] & & = & & \mathcal{D} \arrow[u, Rightarrow, "\varepsilon"] \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Ran}F"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\beta'"] &
\end{tikzcd}$$

ex: • $\mathcal{C}$ categoria, $X\in\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[loop left] = \mathbb{1} \arrow[rr, "\{*\}"] \arrow[dr, "X"'] & {} \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{id}_X"] & \mathrm{Set} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, "F = \mathrm{Hom}(X,-)"'] &
\end{tikzcd}$$

$\{\{*\} \Rightarrow F\circ X\} = \mathrm{Hom}_{Set}(\{*\}, FX) \simeq FX$

Se scelgo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) = F$, allora

Estensione di Kan sx

$\updownarrow$

Yoneda !

Sia ora un altro diagramma (F,α):

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "\{*\}"] \arrow[dr, "X"'] & {} \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"'] & \mathrm{Set} & & 1 \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "X"'] & {} \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{id}_X"'] & \mathrm{Set} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] & & = & & \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Hom}(X,-)"] \arrow[ur, bend right, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha'"] &
\end{tikzcd}$$

$\alpha \in FX$

• $\mathcal{D} = \mathbb{1}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & {} \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{E} \\
& \mathbb{1} \arrow[ur, "Z"'] &
\end{tikzcd}$$

$\longleftrightarrow$ $F \Rightarrow Z$ ← funtore costante

$\longleftrightarrow$ cono sotto F di vertice Z

→ ∃! colim F è l'estensione di Kan sx di questo diagramma
∃! lim F è l'estensione di Kan dx di questo diagramma

•

$$\begin{tikzcd}
\bullet\ \bullet \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr] & {} \arrow[d, Rightarrow, "!!"] & \bullet\ \bullet \\
& \bullet \to \bullet \arrow[ur, dashed, "\nexists\ \text{est di Kan}"'] &
\end{tikzcd}$$

l'unico funtore è del tipo $\bullet\ \bullet \to$:)

ma allora la trasf naturale dovrebbe dare $\mathrm{id}\left(\underset{2}{\bullet}\right) \to \underset{1}{\bullet}$ cioè $\underset{2}{\bullet} \to \underset{1}{\bullet}$ e non c'è

(·) es: $$\begin{tikzcd} \odot \to \odot \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \to \bullet \\ \odot \to \bullet \to \odot & \end{tikzcd}$$ Calcolare (se esistono) Ran e Lan

Fissiamo K: guardiamo $\mathrm{Lan}_K(-)$, supponiamo che $\mathrm{Lan}_K(F)$ esista $\forall\, F: \mathcal{C} \to \mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_K F"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Lan}_K(-): \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$

e uguale su $\mathrm{Ran}_K(-)$ (supponendo che $\mathrm{Ran}_K(F)$ esista $\forall\, F$)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \alpha"] \arrow[d] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\overset{G}{\varepsilon^G \Uparrow}"] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Ran}_K G"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\varepsilon^F \Uparrow"] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Ran}_K F"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{Ran}_K G"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \alpha'"] & \end{tikzcd}$$

perché $(\mathrm{Ran}_K F, \varepsilon^F)$ estensione di Kan dx

$\mathrm{Ran}_K(\alpha) = \alpha'$

Quindi:
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=40, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right=40, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Uparrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Uparrow\beta"] \arrow[d] \arrow[d, phantom, shift left=5, "\Uparrow \varepsilon^H"] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Ran}_K H"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\varepsilon^F \Uparrow"] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, bend left] \arrow[ur, "\Uparrow\alpha'"] \arrow[ur, bend right, "\Uparrow\beta'"'] & \end{tikzcd}$$

ovvero

$\mathrm{Ran}_K(\alpha \circ \beta) = \alpha' \circ \beta'$
$= \mathrm{Ran}_K \alpha \circ \mathrm{Ran}_K \beta$

In effetti Lan, Ran sono funtori da $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$

__Teo__:
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \arrow[r, "- \circ K"] & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \arrow[l, bend right=50, "\mathrm{Lan}_K"'] \arrow[l, bend left=50, "\mathrm{Ran}_K"] \arrow[l, phantom, shift right=4, "\perp"] \arrow[l, phantom, shift left=4, "\perp"] \end{tikzcd}$$

__Dim__: $(G: \mathcal{D} \to \mathcal{E},\ \alpha: F \to GK)$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}}(G, -) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}(F, - \circ K)$

$$\left[\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] \arrow[d, phantom, shift left=5, "\alpha \Downarrow"] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[ur, bend right=60, "H"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Downarrow"] & \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] \arrow[d, phantom, shift left=5, "\Downarrow"] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd} \right]$$
(Yoneda) elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}(F, G \circ K) \ni \alpha$

Se $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ estensione di Kan sx $\Rightarrow$ η^* è un isomorfismo

Quindi $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ rappresenta $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}(F, - \circ K)$ ovvero:

$\mathrm{Hom}(\mathrm{Lan}_K F, G) \simeq \mathrm{Hom}(F, GK) \leftrightarrow \mathrm{Lan}_K$ agg sx di $- \circ K$

__Oss__: η induce l'unità dell'aggiunzione

ex: $H \overset{i}{\hookrightarrow} G$ sottogruppo: rappr. di $G = \begin{tikzcd} \mathrm{Vect}^{BG} \arrow[r, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Vect}^{BH} \arrow[l, bend right, "\mathrm{Ind}"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{coInd}"] \end{tikzcd} =$ rappr di H

→ induce $BH \to BG$ →

→ sono estensioni di Kan!

ex: fasci: f^{-1}, f_* → estensioni di Kan?

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] & \mathcal{E} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_K F"'] &
\arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\Downarrow \eta"]
\end{tikzcd}$$

dato $Y \in \mathcal{D}$: $\mathrm{Lan}_K F(Y) = ?$

Sia $X \in \mathcal{C}$: $\eta_X : FX \longrightarrow \mathrm{Lan}_K F \, K(X))$

se avessi $KX \xrightarrow{\varphi} Y$ in $\mathcal{D}$, allora:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\eta_X"] & \mathrm{Lan}_K F(KX) \arrow[d, "\mathrm{Lan}_K \varphi"] \\
& \mathrm{Lan}_K F(Y)
\end{tikzcd}$$

[Idea: approssimare $\mathrm{Lan}_K FY$ con oggetti FX e mappe $FX \to \mathrm{Lan}_K FY$]

$(K \downarrow Y)$ = "categoria slice" con oggetti (X, φ) $X \in \mathcal{C}$, $\varphi : KX \to Y$

Quindi per quanto visto: $\forall (X, \varphi) \in (K \downarrow Y)$: $FX \longrightarrow \mathrm{Lan}_K FY$

e sappiamo $(K \downarrow Y) \xrightarrow{U} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}$

__Teo__: Se $\forall Y \in \mathcal{D}$, $\mathrm{colim}((K\downarrow Y) \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E})^{(*)}$ esiste in $\mathcal{E}$, allora definisce l'est di Kan sinistra di F lungo K

dualmente se $\forall Y \in \mathcal{D}$, $\lim((Y\downarrow K) \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E})$ esiste in $\mathcal{E}$, allora definisce l'est di Kan destra di F lungo K

__Dim__: • $\mathrm{Lan}_K F$ è un funtore? (definisco $\mathrm{Lan}_K FY$ come il colim $(*)$)

• $\eta : F \Rightarrow \mathrm{Lan}_K F \circ K$ cioè dato $X \in \mathcal{C}$ voglio $FX \longrightarrow \mathrm{Lan}_K F(KX)$

① Sia $f : Y \to Y'$ in $\mathcal{D}$, voglio $\mathrm{Lan}_K F(f) : \mathrm{Lan}_K F(Y) \to \mathrm{Lan}_K F(Y')$ 12/18

$$\begin{tikzcd}
(K\downarrow Y) \arrow[r, "f_*"] & (K\downarrow Y') \\
(X, \varphi) \arrow[r, mapsto] & (X, f\circ\varphi)
\end{tikzcd}$$

con $\varphi : KX \to Y$

e f_* t.c.

$$\begin{tikzcd}
(K\downarrow Y) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "U_Y"'] & \circlearrowright & (K\downarrow Y') \arrow[dl, "U_{Y'}"] \\
& \mathcal{C} \arrow[d, "F"] & \\
& \mathcal{E} &
\end{tikzcd}$$

Ho un cono sotto $(K\downarrow Y) \to \mathcal{E}$ con vertice $\mathrm{Lan}_K F(Y')$

$$FU_Y = FU_{Y'} f^* \downarrow \Delta_{\mathrm{Lan}_K FY'}$$

$\Rightarrow \exists !$ mappa canonica $\mathrm{Lan}_K F(Y) \to \mathrm{Lan}_K F(Y')$

(es mostrare che è un funtore)

② Costruzione di η : voglio $\forall X \in \mathcal{C}$ $FX \xrightarrow{\eta_X} \mathrm{Lan}_K F(KX)$

ma ora $\mathrm{Lan}_K F(KX) = \mathrm{colim}((K \downarrow K(X)) \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E})$

$$(X, \mathrm{id}) \longrightarrow FX$$

$\to$ ho una mappa da $FX \to \mathrm{Lan}_K F(KX)$

• η naturale: $g : X \to X'$ in $\mathcal{C}$, vogliamo:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "\lambda^{KX'}_{(X, Kg)}"] & \mathrm{Lan}_K F(KX) \arrow[d, "\mathrm{Lan}_K FKg"] \\
FX' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & \mathrm{Lan}_K F(KX')
\end{tikzcd}$$

$\circlearrowright$ $\circlearrowright$

osservo: $(X, Kg) \in (K \downarrow KX')$ e $(X, Kg) \xrightarrow{g} (X', \mathrm{id})$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r] \arrow[dr, "\lambda^{KX'}_{(X,Kg)}"'] & FX' \arrow[d, "\eta_{X'}"] \\
& \mathrm{Lan}_K F(KX')
\end{tikzcd}$$

$\circlearrowright$

③ Proprietà universale: per verificare che sia veramente estensione di Kan bisogna verif.:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_k F"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] & \end{tikzcd}$$

$$\forall: \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_k F"] \arrow[ur, bend right=50, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \beta"'] & \end{tikzcd}$$

Costruiamo $\beta: \mathrm{Lan}_k F \Rightarrow G$ cioè $\forall\ Y \in \mathcal{D}$ vogliamo

$\mathrm{Lan}_k FY \xrightarrow{\beta_Y} GY$: $\forall (X, \varphi) \in K \downarrow Y$, vorrei uno mappa

$$FX \xrightarrow{G\varphi \circ \alpha_X} GY$$

(così per prop univ di $\mathrm{Lan}_k FY$ ho β_Y)

Bisogna verificare che in effetti definiscono un cono

ma $\underbrace{FX \xrightarrow[\alpha_X]{} GKX \xrightarrow[G\varphi]{} GY}$

$\forall h: (X, \varphi) \to (X', \varphi') \to$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Fh"] \arrow[dr] & FX' \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & GY \end{tikzcd}$$

Data β bisogno verificare:
- β naturale
- "$\beta \circ \eta$" $= \alpha$ $(\forall X: \alpha_X = \beta_{kX} \circ \eta_X)$
- β unica

__Cor__: $\mathcal{C}$ piccola, $\mathcal{D}$ localmente piccola, $\mathcal{E}$ cocompleta $\Rightarrow \mathrm{Lan}_k F$ esiste ed è come nel teo

$\mathcal{E}$ completa $\Rightarrow \mathrm{Ran}_k F$ esiste ed è come nel teo

ex: •

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{Q}, \leq) \arrow[r, "2^-"] \arrow[d, hook, "i"'] & (\mathbb{R}_{\geq 0}, \leq) \\ (\mathbb{R}, \leq) \arrow[ur, "2^-"'] & \end{tikzcd}$$

è l'estensione di Kan dx e sx di 2^- rispetto all'inclusione i

(In un poset il colim è il sup: $\mathrm{Lan}_i 2^x = \sup\limits_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q \leq x}} 2^q$

ed il lim è l'inf: $\mathrm{Ran}_i 2^x = \inf\limits_{q \geq x} 2^q$)

• $H < G$ sottogr: $H \hookrightarrow G$ da cui $BH \longrightarrow BG$ e quindi troviamo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_k^{BG} \arrow[r, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Vect}_k^{BH} \arrow[l, bend right=50, "\mathrm{ind}"', "\perp"] \arrow[l, bend left=50, "\mathrm{coind}", "\perp"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} BH \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Vect}_k \\ BG \arrow[ur, "\mathrm{Lan}"'] & \end{tikzcd}$$ è la rappr. indotta

__Oss__: non è necessario avere i colimiti per avere estensioni di Kan sx

__Def__: $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} & \end{tikzcd}$ diciamo che $G: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ __preserva__ un'estensione di Kan sx $(\mathrm{Lan}_k F, \eta)$ se

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "G"] & \mathcal{F} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_k F"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] & & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "GF"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{F} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_k GF"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow G\eta"] & \end{tikzcd}$$

Lemma: Gli aggiunti sinistri preservano le estensioni di Kan sinistre

Idea:
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "GF"] \arrow[d, "k"'] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\overset{\alpha}{\Downarrow}"] & \mathcal{F} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}
\overset{?}{=}
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "GF"] \arrow[d, "k"'] \arrow[d, phantom, shift left=4, "G\eta \Downarrow"] & & \mathcal{F} \\
\mathcal{D} \arrow[urr, "G\mathrm{Lan}_k F"] \arrow[urr, bend right=50, "H"'] \arrow[urr, phantom, shift right=4, "\Downarrow \alpha'"] & &
\end{tikzcd}$$

c counità
u unità

Sia $R : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ l'aggiunto dx di G. dico che

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{E} \arrow[r, equal] \arrow[dl, Rightarrow, "\alpha"'] \arrow[d, "G"] & \mathcal{E} \arrow[dl, phantom, "\Downarrow u"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{F} \arrow[ur, "R"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k"'] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\eta \Downarrow"] & \mathcal{E} \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, shift right=2, "\exists ! \beta \Rightarrow"] & \mathcal{E} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_k F"] \arrow[r, "H"'] & \mathcal{F} \arrow[ur, "R"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{E} \arrow[dl, Rightarrow, "\alpha"'] \arrow[d, "G"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "k"'] & & \mathcal{E} \arrow[r, equal] \arrow[dl, Rightarrow, "\alpha"'] \arrow[d, "G"'] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\Downarrow u"] & \mathcal{E} \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow c"] & \\
& K \arrow[r, "H"'] & \mathcal{F} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

identità triangolari dell'aggiunt